

Capitolo 1

Suono

Il mezzo che permette la trasmissione della musica è il suono. Il suono consiste nella vibrazione dell'aria: quindi, per comprendere bene il suono, è utile analizzare prima la struttura dell'aria. Esso è un gas, il che vuol dire che le molecole e gli atomi che la compongono non sono vicine le une alle altre come accade invece nei solidi e nei liquidi. Ci si è posti il problema di capire come mai queste molecole non sono soggette al principio galileiano secondo cui ogni oggetto dovrebbe cadere al suolo con la stessa accelerazione indipendentemente dalle dimensioni e dalla massa. La risposta va trovata nell'estrema rapidità di questi atomi e molecole. La velocità media delle molecole a temperatura ambiente è di 400-500 metri per secondo e il cammino libero è $6 \cdot 10^{-8}$ metri: questo significa che in media una molecola d'aria percorre questa distanza prima di collidere con un'altra molecola. L'urto tra esse è completamente elastico, cosicché esso non determina una diminuzione della velocità.

Possiamo adesso calcolare il numero di collisioni al secondo. La frequenza di collisione è il rapporto tra la velocità media e il cammino libero che corrisponde a circa 10^{10} collisioni al secondo. Dunque, dopo che due molecole si urtano, esse non vanno molto lontano prima di essere urtate nuovamente da altre molecole. Possiamo quindi dire che l'aria consiste in un gran numero di molecole molto vicine tra loro che si urtano continuamente e producono ciò che noi percepiamo come pressione dell'aria. Quando un oggetto vibra provoca onde di pressione nell'aria e tali onde sono percepite dall'orecchio come suono. Il suono viaggia attraverso l'aria con una velocità di circa 340 metri al secondo: ciò non significa però che ogni molecola si muove nella direzione dell'onda, ma che la perturbazione locale della pressione si propaga a questa velocità.

Le onde sonore sono un esempio di onde longitudinali: ciò significa che le particelle dell'aria oscillano lungo la direzione di propagazione. Esse sono determinate da quattro fattori principali:

- ampiezza: è il “volume” della vibrazione che è percepita come rumore;
- altezza: è la qualità che fa distinguere un suono acuto da uno grave ed è in diretta corrispondenza con la frequenza di vibrazione;
- timbro: è la qualità che, a parità di frequenza, distingue un suono da un altro, e dipende dalla forma dell'onda sonora;
- durata: è l'intervallo di tempo durante il quale viene emessa l'onda sonora.

1.1 L'orecchio umano

L'orecchio ha il compito di tradurre in stimoli nervosi le variazioni di pressione che lo colpiscono. L'orecchio umano è divisibile in tre parti: l'orecchio esterno, l'orecchio medio o *timpano* e l'orecchio interno o *labirinto*.

L'orecchio esterno

Esso è costituito da una parte esterna visibile di forma ovoidale, detta *padiglione*, fatta di cartilagine, una media, detta *conca auricolare*, associata alla messa a fuoco ed all'esaltazione dei suoni, e una esterna, chiamata anche *elica*, associata alla separazione spaziale verticale, che ci permette di poter giudicare l'altezza di una sorgente sonora. La parte centrale spedisce i suoni al canale uditivo, detto anche *meato acustico*. Esso è un tubo lungo circa 2.7 cm e avente diametro pari a 0.7 cm, che termina con una membrana, la membrana del timpano, sensibile alle onde sonore che vanno a infrangersi su di essa e che divide proprio l'orecchio esterno da quello medio.

L'orecchio medio

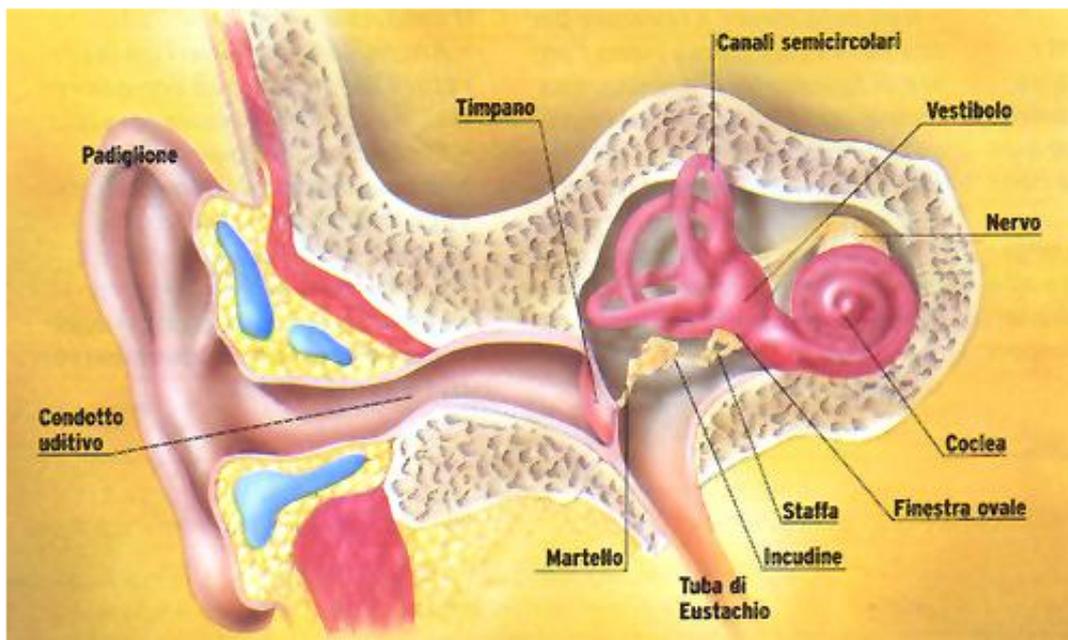
La membrana del timpano è collegata a tre ossicini, i più piccoli del corpo umano: il *martello*, con cui è direttamente a contatto l'*incudine*, e la *staffa*, che è invece a contatto con il labirinto. Essi formano un sistema di leve di collegamento tra il timpano e una membrana che copre una piccola apertura presente nell'orecchio interno, chiamata *finestra ovale*. Queste tre ossa sono contenute in una cavità, la *cassa del timpano*, che comunica all'esterno attraverso un piccolo canale lungo 3-4 cm, la *tromba di Eustachio*, che sbocca poi nella faringe.

L'orecchio interno

È costituito da un insieme di cavità ossee scavate nell'osso temporale, dette *labirinto osseo*, all'interno delle quali sono presenti altre cavità più piccole, che costituiscono il *labirinto membranoso* e le cui pareti risultano membranose. Tra le due porzioni di labirinto è presente un liquido, la *perilinf*a, mentre internamente agli organi del labirinto membranoso è presente un liquido diverso, l'*endolinf*a. Entrambi i labirinti possono essere a loro volta divisi in tre parti: una cavità centrale detta *vestibolo*, tre canali a forma anulare, detti *canali semicircolari*, che giocano un ruolo fondamentale nell'equilibrio, e un canale a forma di serpente detto *coclea* o *chiocciola*. Quest'ultima ha lo scopo di separare i suoni in diverse componenti di frequenza prima di trasmetterli ai nervi. La coclea, situata in basso e lateralmente rispetto al vestibolo, sviluppa al suo interno il *canale cocleare*, che inizia in corrispondenza del pavimento del vestibolo e si avvolge ad elica, formando circa tre giri a partire dalla cassa timpanica fino alla cupola della chiocciola. La chiocciola è formata da una lamina spirale, sottile ed ossea, che attraversa nel senso della lunghezza il dotto cocleare. Dal lato esterno della lamina partono due membrane: quella *vestibolare* o *del Reissner* e quella *basilare*. Entrambe raggiungono la parete laterale del dotto cocleare. L'interno della coclea è quindi diviso in uno spazio al di sopra della lamina di Reissner, che corrisponde alla *rampa vestibolare*, uno al di sotto della membrana basale o

rampa timpanica ed uno situato in mezzo, chiamato *rampa media*. Compresa tra la cassa timpanica e la rampa si trova la *finestra rotonda*, chiusa da una membrana di connettivo, atta a regolare e a garantire la giusta pressione dell'orecchio interno quando si verificano vibrazioni della finestra ovale, che corrisponde alla comunicazione della cassa timpanica con l'orecchio interno. Sulla membrana basilare, rivestita da epitelio, si differenzia l'organo spirale o *del Corti*, che rappresenta l'organo acustico vero e proprio, perché contiene i recettori dell'udito, e ha una struttura cellulare fatta di un doppio ordine di cellule acustiche ciliate, interne ed esterne, in numero di circa 20.000.

Dunque l'orecchio esterno focalizza e amplifica le onde sonore, che mettono in vibrazione il timpano auricolare, e le dirige verso l'orecchio medio. Nell'orecchio medio, l'energia di queste onde viene trasformata in vibrazioni meccaniche della struttura ossea dell'orecchio medio (energia cinetica). Uno dei tre ossicini della catena, la staffa, muovendosi avanti e indietro entro la finestra ovale della coclea trasmette l'impulso cinetico alla perilinfa in essa contenuta; attraverso l'endolinfa del condotto cocleare le onde vengono trasmesse dalla rampa vestibolare alla rampa timpanica (e quindi entrano in vibrazione anche le membrane che separano le rampe, o stanze, della coclea). Il segnale arriva così alla membrana basilare, che separa la rampa vestibolare da quella timpanica, e dove si trova l'organo del Corti. Le cellule acustiche in esso contenute sono in contatto con le cellule nervose che fanno parte del nervo vestibolo cocleare. Di lì il segnale, che nella coclea viene trasdotto (l'energia cinetica diventa energia elettro-chimica), giunge all'area acustica della corteccia cerebrale, e poi al lobo temporale del cervello: qui avviene la decodificazione dell'impulso elettrico, e si giunge così alla percezione del suono.



1.1.1 Limitazioni dell'orecchio umano

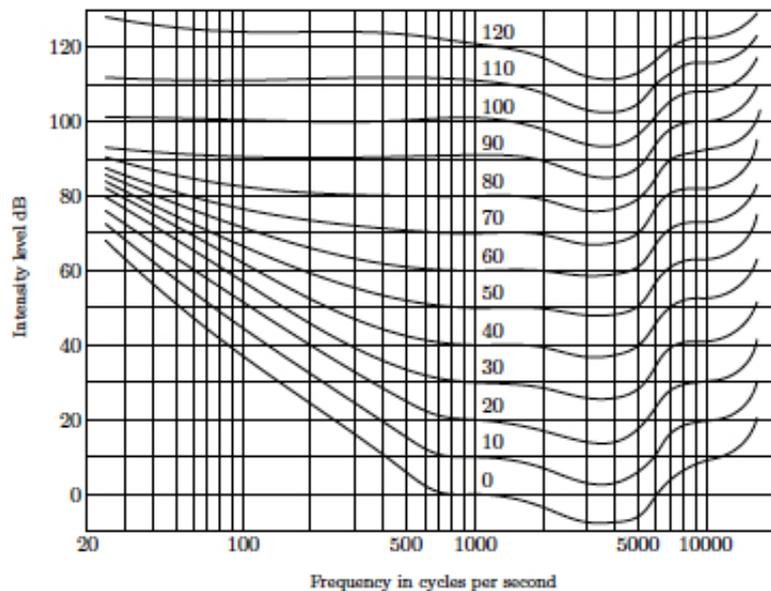
In musica le frequenze sono misurate in Hertz (Hz). Lo spettro approssimativo delle frequenze che l'orecchio umano può udire va da circa 20 Hz fino a 20.000 Hz. Per frequenze al di fuori di questo intervallo non c'è risonanza nella membrana basilare. L'intensità del

suono è misurata in *decibel* (dB). Zero decibel rappresentano un'intensità di potenza pari a 10^{-12} watt per metro quadrato, che è quindi in qualche modo il suono più debole che possiamo percepire. Aggiungere 10 dB equivale a moltiplicare l'intensità di potenza per un fattore 10. Viceversa moltiplicare l'intensità per un fattore b equivale ad aggiungere $2 \log_{10}(b)$ decibel al livello del segnale. Quindi possiamo concludere che la scala per misurare l'intensità dei suoni è logaritmica e n decibel rappresentano una densità di potenza di $10^{(\frac{n}{10})-12}$ watt per metro quadrato.

La soglia di udibilità è il livello del suono più debole che possiamo udire. Il suo valore in decibel varia da una parte dello spettro di frequenze a un'altra. Le nostre orecchie sono più sensibili alle frequenze leggermente sopra i 2000 Hz, dove la soglia di udibilità della maggior parte delle persone è leggermente superiore a 0 dB. A 100 Hz la soglia di udibilità è di circa 50 dB e a 10 Hz è di circa 30 dB. Una conversazione normale avviene a circa 60-70 dB, mentre il bisbiglio è circa 15-20 dB, e la soglia del dolore è a circa 130 dB.

Vi è dunque una relazione stretta, anche se non un'identità, fra l'intensità del suono e la percezione di rumorosità. Il grafico seguente, che si deve a Fletcher e Munson, mostra attraverso una serie di curve il rapporto, per tutte le frequenze udibili, tra la pressione acustica e la corrispondente "rumorosità" percepita dall'orecchio, per vari gradi d'intensità, dalla soglia di udibilità a quella del dolore. L'unità di misura per la sensazione che riceviamo (cioè per la rumorosità) è il *phon*. L'ascoltatore regola il livello del segnale fino a quando lo si giudica di intensità pari a un'intensità standard di 1000 Hz. Il livello del phon è definito come livello di pressione del segnale di 1000 Hz della stessa intensità.

Le curve di questo grafico sono chiamate *curve isofone*.



1.2 Perché le onde sonore

Ci chiediamo perché nella discussione della percezione dell'altezza usiamo le onde sinusoidali. Potremmo ad esempio svolgere questa trattazione utilizzando un'altra famiglia di onde periodiche? La risposta risiede nello studio dell'equazione differenziale di un moto

armonico semplice:

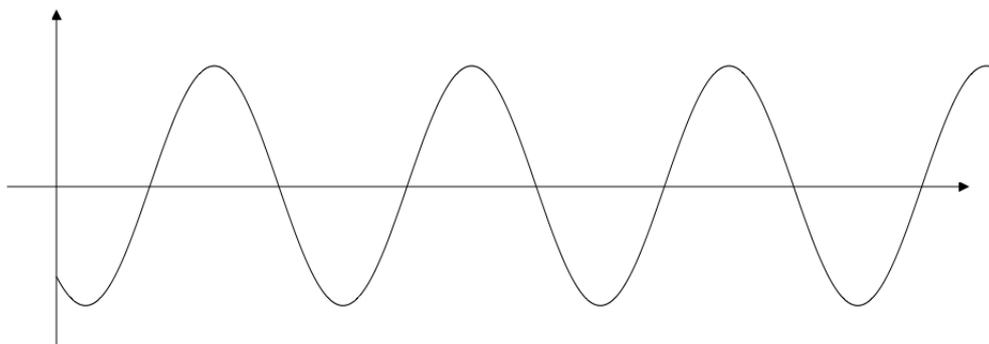
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

le cui soluzioni sono

$$y = A \cos \sqrt{kt} + B \sin \sqrt{kt}$$

o equivalentemente

$$y = c \sin(\sqrt{kt} + \phi)$$



Nella figura i parametri sono $c = 1$, $k = 9$ e $\phi = 4$.

Questa equazione descrive i fenomeni elastici, quando un oggetto tende a una posizione di equilibrio a causa di una forza la cui ampiezza è proporzionale proprio allo spostamento dall'equilibrio. Nel caso dell'orecchio umano tale equazione rappresenta approssimativamente il moto di un punto particolare situato sulla membrana basilare o lungo la catena di trasmissione tra l'aria esterna e la coclea. Ci sono però tre imprecisioni in tale affermazione: innanzitutto per studiare il moto della superficie della membrana basilare dovremmo disporre di una equazione differenziale di secondo grado, inoltre dovremmo pensare al moto come un moto armonico smorzato, in cui compare un termine di smorzamento proporzionale alla velocità, che deriva dalla viscosità del fluido in cui ci si trova e dal fatto che la membrana basilare non è perfettamente elastica. Vedremo in seguito che il moto armonico smorzato è anch'esso sinusoidale ma contiene un fattore che decade rapidamente con il tempo. Infine l'ultima imprecisione consiste nel fatto che per suoni abbastanza forti la forza di richiamo potrebbe non essere lineare, fatto che sembra essere la causa di molti interessanti fenomeni acustici.

Osserviamo inoltre che la maggior parte della note musicali non sono costituite da una singola onda sinusoidale: per esempio, pizzicando la corda di una chitarra si ottiene un'onda periodica che risulta essere la somma di onde sinusoidali di varia ampiezza. La decomposizione di un'onda periodica come somma di onde sinusoidali è chiamata *analisi di Fourier*.

Capitolo 2

Onde armoniche ed analisi di Fourier

2.1 Moti armonici

Consideriamo una particella di massa m soggetta alla forza di richiamo F verso la posizione di equilibrio $y = 0$ e la cui ampiezza risulta proporzionale alla distanza y dall'equilibrio:

$$F = -ky,$$

dove k è la costante di proporzionalità. Le leggi di Newton ci danno l'equazione

$$F = ma$$

dove

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

indica l'accelerazione della particella e t il tempo. Combinando le due espressioni della forza otteniamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono le funzioni

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Il fatto che queste siano le soluzioni dell'equazione differenziale scritta sopra è la spiegazione del perché le onde sinusoidali e non qualsiasi altra onda oscillante e periodica siano alla base dell'analisi armonica delle onde periodiche.

2.2 Corde vibranti

Analizziamo ora il moto di una corda che vibra. Consideriamo una corda ancorata alle due estremità e supponiamo che essa abbia una *perlina* pesante attaccata nel centro, così che la sua massa sia maggiore di quella della corda. Quest'ultima esercita una forza

sulla perlina diretta verso la posizione di equilibrio, la cui ampiezza, almeno per piccoli spostamenti, è proporzionale alla distanza y dalla posizione di equilibrio:

$$F = -ky$$

Per quanto visto prima otteniamo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0$$

le cui soluzioni sappiamo essere le funzioni

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

dove le costanti A e B sono determinate dalla posizione iniziale e dalla velocità della perlina.

Se la massa della corda è distribuita uniformemente allora diversi modi vibrazionali sono possibili. Per esempio il punto medio della corda può rimanere fermo mentre le restanti metà vibrano con fasi opposte. In una chitarra ciò può realizzarsi sfiorando il punto medio di una corda con una mano e pizzicando il resto della corda con l'altra mano. L'effetto consiste in un suono all'ottava superiore rispetto all'altezza naturale della corda. Se le due metà della corda vibrano con un'onda sinusoidale pura, allora il moto di un qualsiasi punto, escluso il punto medio, sarà descritto dall'equazione

$$y = A \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Analogamente se un punto, posto esattamente ad un terzo della lunghezza della corda da una delle due estremità, viene sfiorato mentre si sta pizzicando la corda stessa, si otterrà un suono di un'ottava superiore rispetto alla sua altezza effettiva e una quinta esatta sopra il suono naturale della corda, o equivalentemente con una frequenza che è tre volte quella fondamentale.

Di nuovo, se la terza parte della corda sta vibrando con un'onda sinusoidale pura, allora il moto di un punto non stazionario sulla corda sarà descritto dalla funzione

$$y = A \cos\left(3\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(3\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

In generale una corda pizzicata produrrà una miscela di tutti i modi descritti dai multipli della frequenza naturale, con varie ampiezze.

Le ampiezze coinvolte dipendono dal modo specifico con cui le corde vengono fatte vibrare. Per esempio una corda percossa da un martelletto come accade nel pianoforte avrà un insieme diverso di ampiezze rispetto a quello di una corda pizzicata. L'equazione generale del moto di un generico punto sulla corda è, almeno in linea teorica,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B_n \sin\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right)$$

Adesso cercheremo di rispondere alla seguente domanda: come possiamo far vibrare una corda con un numero diverso di frequenze nello stesso istante? Questo problema ha occupato la mente di molti musicisti e matematici in tutto il XVII e XVIII secolo. Tra i molti che hanno cercato una soluzione ci sono Marin Mersenne, Bernoulli e Jean Baptiste Joseph Fourier.

2.3 Analisi di Fourier

Discutiamo ora proprio la teoria dell'analisi di Fourier. Come abbiamo già accennato essa si concentra sullo studio delle onde periodiche come somma (in genere finita) di seni e coseni. Le frequenze che entrano in gioco sono interi, multipli della frequenza fondamentale dell'onda periodica e ciascuna di essa ha un'ampiezza che può essere determinata da un intero. Ricordiamo che i suoni emessi dagli strumenti musicali sono il risultato della sovrapposizione di diversi tipi di onde sonore. Per capire in che modo la teoria di Fourier è strettamente connessa alla comprensione dei suoni partiamo da un esempio. Pensiamo di pizzicare la corda di una chitarra, che inizierà quindi a oscillare e a produrre suoni a diverse frequenze, tutte multiple di una stessa frequenza w detta fondamentale, propria della corda, che dipende dalle sue proprietà fisiche come lunghezza e tensione. Il suono emesso dalla corda è dunque descritto da una somma di funzioni periodiche della stesso periodo $T = \frac{1}{w}$ del tipo $a_n \cos \frac{2\pi n\theta}{T}$ oppure $b_n \sin \frac{2\pi n\theta}{T}$.

A meno di un'omotetia, possiamo dunque supporre $T = 2\pi$ e studiare le principali proprietà di *serie trigonometriche* della forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

dove a_n e b_n sono numeri reali o complessi e $\theta \in \mathbb{R}$.

Prima di dare la definizione di serie e coefficienti di Fourier ricordiamo cosa si intende per spazi $L^p(D)$.

Definizione 2.3.1. Fissiamo $p \in [1, \infty[$ e un sottoinsieme misurabile $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Sia $\mathcal{L}^p(D)$ lo spazio vettoriale delle funzioni misurabili tali che $|f|^p$ è sommabile su D . L'insieme quoziente $\mathcal{L}^p(D)/\simeq$ si indica con $L^p(D)$.

Definizione 2.3.2. Se $f \in L^1(-\pi, \pi)$ definiamo la *serie di Fourier* di f la seguente serie:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (2.1)$$

e chiamiamo i numeri

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta) f(\theta) d\theta, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\theta) f(\theta) d\theta$$

coefficienti di Fourier di f .

Per indicare le somme parziali della serie di Fourier di una certa funzione f useremo, nelle pagine successive, la notazione $S_n(f, x)$ se ci serve valutare la somma in un determinato punto x , o più semplicemente S_n , dove non sono necessarie altre specificazioni.

2.3.1 Convergenza della serie di Fourier

Dunque data una funzione in L^1 possiamo sempre scriverci i coefficienti di Fourier e la serie di Fourier ad essa associata seguendo la definizione data. Inoltre, come si noterà in

seguito, essendo diretta conseguenza del lemma di Fejèr che verrà affrontato tra qualche pagina, vale la proprietà:

$$a_m = b_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies f = 0 \quad q.o.$$

Ci poniamo ora il problema inverso: date due successioni $\{a_m\}, \{b_m\} \subseteq \mathbb{C}$ quando possiamo dire che la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ è la serie di Fourier di una qualche funzione f ?

Se la serie trigonometrica è uniformemente convergente allora vale quanto appena detto. In caso contrario cercheremo delle condizioni o dei casi particolari in cui ciò continua ad accadere.

Partiamo analizzando lo spazio $L^2(-\pi, \pi)$. Ricordiamo che in questo spazio sono definiti il prodotto scalare naturale $f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ e la norma indotta $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt}$. Introduciamo la famiglia dei *polinomi trigonometrici*:

Definizione 2.3.3. Un polinomio trigonometrico è una funzione della forma

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dove $N \in \mathbb{N}^+$, a_0, a_i e b_i per $i = 1, \dots, N$ sono numeri reali o complessi. Si definisce grado di P il massimo N tale che $|a_n| + |b_n| > 0$ e indichiamo con Γ_N la classe dei polinomi trigonometrici di grado non superiore a N .

Teorema 2.3.1. (*Proprietà di miglior approssimazione*) Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e indichiamo con S_N la somma parziale N -sima della serie di Fourier di f , ossia

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Allora si ha

$$\|f - S_N\|_2^2 = \min_{P \in \Gamma_N} \|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right]$$

Il sistema trigonometrico è *completo*, nel senso che le combinazioni lineari finite di elementi di questo sistema approssimano qualunque funzione di $L^2(-\pi, \pi)$ nel senso della norma di L^2 .

Teorema 2.3.2. Per ogni $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e sia S_N la somma parziale N -sima della serie di Fourier di f . Allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx$$

Enunciamo ora un noto teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier sotto opportune ipotesi:

Teorema 2.3.3. (di Dirichlet) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π tale che $|f|^2$ sia sommabile in $(-\pi, \pi)$. Se in un punto $x \in [-\pi, \pi]$ esistono finiti i limiti destro e sinistro di f :

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h), \quad f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x-h)$$

ed esistono finite anche la derivata destra e la derivata sinistra di f :

$$f'(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}, \quad f'(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h}$$

allora la serie di Fourier di f è convergente nel punto x e si ha

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

.

Dirichlet si pose il problema se la serie di Fourier di una qualunque funzione integrabile o almeno continua convergesse: egli riteneva che la risposta a questa domanda dovesse essere affermativa. Durante tutta la prima metà dell'Ottocento questa idea fu supportata nel corso dagli anni da altri matematici come Riemann, Weierstrass e Dedekind. Ci fu dunque un enorme stupore quando Du Bois-Reymond esibì un controesempio che noi ci limiteremo ad enunciare sotto forma di teorema.

Teorema 2.3.4. Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica, tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |S_n(f, x)| = \infty.$$

Un teorema di rilievo su questo argomento è stato fornito dal matematico Fejèr. L'idea sulla quale si basò fu che se la somma parziale s_m definita da

$$s_m(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^m (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

converge, allora le corrispondenti medie aritmetiche

$$\sigma_m(\theta) = \frac{s_0 + \dots + s_m}{m+1}$$

convergono allo stesso limite. Può capitare invece che σ_m converga senza che s_m converga. Quest'idea era già presente prima che Fejèr si avvicinasse a tale problema. Era già stata usata da Eulero e approfondita da Cesàro e infine prese il nome di sommabilità di Cesàro.

Definizione 2.3.4. Una serie di Fourier si dice sommabile secondo il metodo di Cesàro, o Cesàro-sommabile, se esiste finito il limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m(x).$$

Sappiamo che la somma parziale può essere espressa nel seguente modo

$$s_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) D_n(\theta - x) d\theta$$

dove $D_n(\theta)$ è il *nucleo di Dirichlet*. Possiamo allora riscrivere la somma di Cesàro nella forma

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^n D_k(\theta - x) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) K_m(\theta - x) d\theta$$

dove

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(u).$$

Dunque

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) K_m(u) du.$$

La funzione $K_m(u)$ prende il nome di *nucleo di Fejèr*.

Poichè

$$D_m(u) = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{\cos mu - \cos(m+1)u}{4 \sin^2 \frac{u}{2}}$$

si ha

$$\begin{aligned} K_m(u) &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{\cos ku - \cos(k+1)u}{4 \sin^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 - \cos(k+1)u}{(m+1)4 \sin^2 \frac{u}{2}} \\ &= \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{\sin(m+1)\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Riusciamo adesso a dare alcune proprietà del nucleo di Fejèr:

1. $K_m(u) \geq 0$.
2. $K_m(u) \leq \frac{1}{2(m+1)\sin^2 \frac{u}{2}} \leq \frac{\pi^2}{2(m+1)u^2}$ per $0 < |u| \leq \pi$.
3. $K_m(u) \leq \frac{\pi^2}{2(m+1)\delta^2}$ per $0 < \delta \leq |u| \leq \pi$ e dunque, ponendo

$$M_m(\delta) = \max_{\delta \leq u \leq \pi} K_m(u),$$

abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_m(\delta) = 0.$$

4. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(u) du = 1$, il che si dimostra semplicemente osservando che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(u) du = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. Se $0 < \delta < \pi$ si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_m(u) du = 1.$$

Teorema 2.3.5 (Fejèr). *Sia f una funzione 2π -periodica. Se x è un punto di continuità o di discontinuità di prima specie per f , allora in tale punto $\sigma_m(f)$ converge a $f(x)$ oppure a $[f(x+0) + f(x-0)]/2$, rispettivamente; se (a, b) è un intervallo in cui $f(x)$ è continua, allora $\sigma_m(f)$ converge uniformemente a f in ogni sottointervallo $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Inoltre se $f(x)$ è ovunque continua allora σ_m converge uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$.*

Dimostrazione. Per affrontare questa dimostrazione dobbiamo introdurre un

Lemma 2.3.1. *Consideriamo la funzione*

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \psi_n(t) dt,$$

dove $\psi_n(t)$ possiede le seguenti proprietà:

1. ψ_n è una funzione pari;
2. $\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n(t)| dt \leq C$ per $n = 1, 2, \dots$, dove C è una costante;
3. definendo per $\delta > 0$

$$M_n(\delta) = \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\psi_n(t)|$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\delta) = 0;$$

4. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t) dt = 1;$

allora, se x è un punto di discontinuità del primo tipo di f si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni punto di continuità di $f(x)$. Se poi $f(x)$ è continua in (a, b) allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $[\alpha, \beta]$ per ogni $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Per dimostrare questo lemma osserviamo innanzitutto che per la proprietà (4) della funzione ψ_n abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \psi_n(t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+0) + f(x-0)] \psi_n(t) dt \end{aligned}$$

per la parità della funzione $\psi_n(t)$. Possiamo anche scrivere

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \psi_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \psi_n(t) dt$$

Unendo le ultime due espressioni scritte otteniamo

$$f_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)] \psi_n(t) dt$$

Dimostreremo ora che l'integrale che si trova nel membro di destra tende a zero per $n \rightarrow \infty$ e che se f è continua in (a, b) allora esso tende uniformemente a zero in $[\alpha, \beta]$, se $a < \alpha < \beta < b$. Per fare ciò scegliamo un numero δ tale che per $0 \leq x \leq \delta$ si abbia

$$|f(x+t) - f(x+0)| < \epsilon, \quad |f(x-t) - f(x-0)| < \epsilon :$$

ciò è possibile per ogni x fissato; se però f è continua in (a, b) (in tal caso $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$), allora è possibile scegliere un δ indipendente da $x \in [\alpha, \beta]$ che soddisfa le disuguaglianze scritte sopra. Con questa scelta di δ , dividiamo l'integrale che stiamo studiando in due parti: l'integrale I_1 nell'intervallo $(0, \delta)$ e l'integrale I_2 nell'intervallo (δ, π) . Otteniamo allora

$$|I_1| < 2\epsilon \int_0^\pi |\psi_n(t)| dt < 2\epsilon C$$

per la proprietà (2) della funzione ψ_n .

Per I_2 abbiamo invece

$$|I_2| \leq M_n(\delta) \int_\delta^\pi \{|f(x+t)| + |f(x+0)| + |f(x-t)| + |f(x-0)|\} dt.$$

Per ogni x fissato l'integrale appena scritto tende a zero per la proprietà (3) della funzione ψ_n , ossia $I_2 \rightarrow 0$. Inoltre se $x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$ allora per ogni x il nostro integrale non supera la quantità

$$\int_{-\pi}^\pi \pi |f(t)| dt + 2\pi |f(x)|$$

e poichè f è continua in (a, b) ed è limitata in $[\alpha, \beta]$, allora $I_2 \rightarrow 0$ uniformemente.

A questo punto poniamo $f_n(x) = \sigma_n(x)$, e dunque per dimostrare il teorema di Fejèr sarà sufficiente provare che il nucleo di Fejèr K_n soddisfa le ipotesi del lemma. La proprietà (1) è automaticamente soddisfatta per la parità del nucleo di Dirichlet ($D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx$); le (3), (4) sono già state dimostrate e (2) segue dal fatto che per il nucleo di Fejèr vale, come sappiamo,

$$\int_{-\pi}^\pi |K_n(t)| dt = \int_{-\pi}^\pi K_n(t) dt = \pi.$$

□

Possiamo interpretare questo teorema dicendo che ogni funzione continua può essere ricostruita partendo dai suoi coefficienti di Fourier.

Esponiamo adesso il teorema di Fejèr per le funzioni in L^p .

Teorema 2.3.6. *Sia $f \in L^p(-\pi, \pi)$ una funzione 2π -periodica. Allora $\sigma_m \rightarrow f$ in $L^p(-\pi, \pi)$.*

Dimostrazione. Si ha

$$I = \|\sigma_m - f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_m(x-y) dy - f(x) \right|^p dx,$$

ed essendo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(y) dy = 1$$

deduciamo che

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) K_m(y) dy \right|^p dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| K_m(y)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} dy \right]^p dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|^p K_m(y) dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} K_m(y) dy \right]^{\frac{1}{q}} \right]^p dx = \\ &= \frac{\pi^{\frac{p}{q}}}{\pi^p} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right] K_m(y) dy. \end{aligned}$$

Poiché, fissato ϵ , esiste δ tale che $\|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(-\pi, \pi)} < \epsilon$ per ogni $|h| < \delta$, possiamo dividere l'integrale in due pezzi e dire che

$$I \leq \frac{1}{\pi} \int_{|y| \leq \delta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p(-\pi, \pi)} K_m(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} 2\|f\|_{L^p(-\pi, \pi)} K_m(y) dy;$$

utilizzando la definizione e le proprietà del nucleo di Fejèr, possiamo concludere che

$$I \leq \epsilon + 2\|f\|_p \frac{\pi}{(m+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}} < 2\epsilon$$

per $m \geq m_{\epsilon, \delta} = m_{\epsilon}$. □

Ci sono diversi modo in cui può essere interpretata la convergenza della serie di Fourier, il più importante è quello riguardante lo scarto quadratico medio.

Teorema 2.3.7. *Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$ una funzione periodica con periodo 2π . Tra tutte le funzioni g che sono combinazioni lineari di $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$ con $0 \leq n \leq m$, la somma parziale s_m verifica*

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - s_m(\theta)|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta.$$

Inoltre lo scarto quadratico medio tende a 0 per $m \rightarrow \infty$, vale a dire $s_m \rightarrow f$ in $L^2(-\pi, \pi)$.

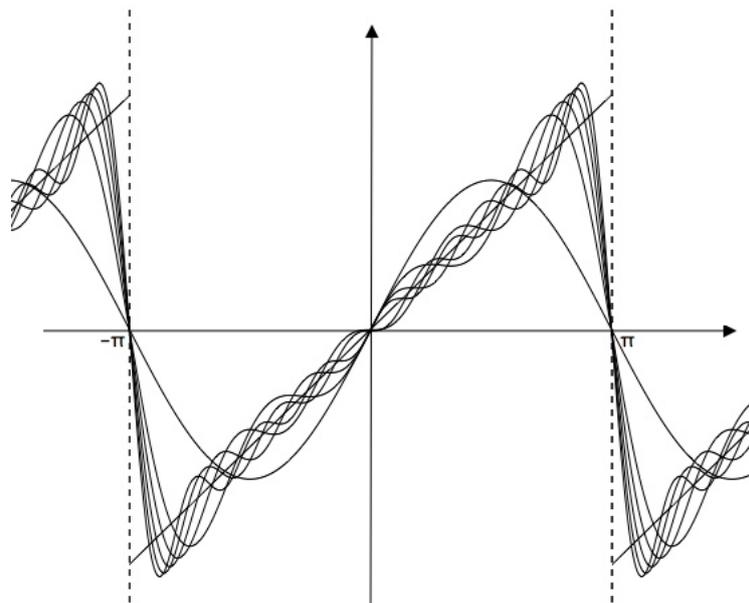
Concludiamo questo paragrafo con un altro teorema sulla convergenza della serie di Fourier.

Teorema 2.3.8. *(di Jordan) Se f è una funzione a variazione limitata¹ in un sottointervallo $[a, b]$ di $[-\pi, \pi]$, allora la sua serie di Fourier è convergente in ogni punto di tale intervallo. La sua somma è $f(x)$ nei punti in cui f è continua e $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ nei punti di discontinuità. Inoltre se $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ e f è continua in $[\alpha, \beta]$, allora la serie di Fourier converge uniformemente in $[\alpha, \beta]$.*

¹Una funzione si dice a variazione limitata se la sua "variazione totale" è finita. Per le funzioni di una variabile, ciò vuol dire che la distanza percorsa da un punto che si muove lungo il suo grafico è finita.

2.4 Il fenomeno di Gibbs

Nel 1871 Kelvin ideò un meccanismo che, data una funzione periodica, riproduceva la corrispondente serie di Fourier e, viceversa, ricostruiva una funzione periodica avendo come input la corrispondente serie. Una macchina di questo tipo fu costruita anche da Michelson. La prima funzione che Michelson utilizzò per mettere alla prova la sua nuova macchina fu la funzione $h(x) = x \in (-\pi, \pi)$ e $h(\pm\pi) = 0$. Sorprendentemente la macchina non riprodusse perfette approssimazioni della funzione h : i grafici presentavano piccole oscillazioni che non approssimavano il grafico di h attorno ai due punti di discontinuità $\pm\pi$.



Michelson provò allora a regolare meglio la macchina, pensando che essa avesse qualche difetto, ma nonostante questo le discrepanze persistevano. Alla fine, mediante calcoli fatti a mano si dimostrò effettivamente che le somme parziali S_n della serie di Fourier di h hanno effettivamente queste oscillazioni in prossimità dei punti di discontinuità. Si osservò anche che, con l'aumentare di n , le oscillazioni sono sempre più concentrate nell'intorno dei punti di discontinuità, ma che la loro altezza, in valore assoluto, è fra il 117% e il 118% rispetto al valore corretto della funzione, sempre inteso in valore assoluto. Ci si è posto il problema di studiare le proprietà di convergenza delle serie di Fourier di funzioni simili a questa. Quello che si è scoperto è che la condizione di convergenza puntuale $S_n(h, t) \rightarrow h(t)$ non garantisce che anche il grafico di f_n approssimi il grafico di f . Gibbs approfondì questo argomento.

Teorema 2.4.1. *Consideriamo la funzione $h(x) = x$ per $x \in (-\pi, \pi)$ e $h(\pm\pi) = 0$, prolungata poi con periodicità. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(h, \pi - \frac{\pi}{n} \right) = A\pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(h, -\pi + \frac{\pi}{n} \right) = -A\pi,$$

dove $A = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx \in]1.17, 1.18[$.

Questo teorema mostra appunto che vi è uno scarto strettamente positivo in norma uniforme, nell'intorno del punto di discontinuità, fra la funzione e la sua serie di Fourier.

Dimostrazione. Partiamo calcolando le somme parziali della serie di Fourier associata ad h . Essendo h una funzione dispari, i coefficienti a_n sono tutti nulli mentre i coefficienti b_n valgono:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx.$$

Integrando per parti otteniamo

$$b_n = \left[\frac{2}{\pi} \frac{-x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos nx \, dx = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Dunque la serie di Fourier associata ad h è

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n},$$

e la somma parziale n -sima della serie di Fourier sarà

$$S_n(h, x) = \sum_{k=1}^n 2(-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}.$$

Valutiamo tale somma nei punti $\pm\pi \mp \frac{\pi}{n}$:

$$S_n\left(h, \pi - \frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} (-1)^{k-1} \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{n}\right);$$

utilizzando le formule di addizione e sottrazione

$$S_n(h, x) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} (-1)^{2n} \frac{\sin k\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \sin \frac{k\pi}{n} = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{n}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \right).$$

Osservando che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è limitata e continua in $[0, 2\pi]$ possiamo concludere banalmente che per $n \rightarrow \infty$

$$S_n\left(h, \pi - \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Con lo stesso procedimento otteniamo anche, per $n \rightarrow \infty$, che

$$S_n\left(h, -\pi + \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow -2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Abbiamo così dimostrato la prima parte del teorema. Resta da far vedere che

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \in]1.17, 1.18[.$$

Ma poiché

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

con convergenza uniforme sui limitati di \mathbb{R} , integrando termine a termine otteniamo

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

La serie appena scritta è una serie a segni alterni: per il criterio di Leibniz, l'errore dovuto al troncamento dei termini della serie è minore, in valore assoluto, del primo termine trascurato, cioè

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)!(2k+1)} \right| \leq \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+3)!(2n+3)}.$$

È allora sufficiente scegliere $k = 3$ per ottenere, con l'ausilio di una buona calcolatrice,

$$1.17 < \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx < 1.18.$$

□

Supponiamo adesso di avere una funzione 2π -periodica f , e sia h la funzione definita come sopra, cioè $h(x) = x$ per $x \in (\pi, \pi)$ e $h(\pm\pi) = 0$, e poi prolungata con periodicità. Supponiamo che f abbia N punti di discontinuità di prima specie x_1, x_2, \dots, x_N e sia derivabile negli altri punti con $f' \in L^2(-\pi, \pi)$; proveremo che per ognuno di questi punti x_i è possibile trovare un opportuno λ_i tale che la funzione $g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^N \lambda_i h(x - x_i + \pi)$ non solo soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet ma è anche continua, il che ci garantisce la convergenza. Dimostriamo adesso l'esistenza di questi λ_i . Per la funzione g sopra definita possiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} g(x) = f(x_i + 0) + \lambda_i \pi, \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} g(x) = f(x_i - 0) - \lambda_i \pi,$$

e imponendo che questi due limiti siano uguali (cosicché g è continua) si ha

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = -2\pi \lambda_i,$$

da cui si ricava infine il valore di λ_i :

$$\lambda_i = -\frac{f(x_i + 0) - f(x_i - 0)}{2\pi}.$$

Pertanto la funzione g così costruita è tale che $S_n(g) \rightarrow g$ uniformemente su $[-\pi, \pi]$. Ne segue che anche in questo caso il fenomeno ora descritto si presenta: infatti, per $j = 1, \dots, N$ valgono le relazioni

$$S_n \left(g, x_j - \frac{\pi}{n} \right) = S_n \left(f, x_j - \frac{\pi}{n} \right) - \sum_{i=1}^N \lambda_i S_n \left(h, x_j - x_i + \pi - \frac{\pi}{n} \right),$$

$$S_n \left(g, x_j + \frac{\pi}{n} \right) = S_n \left(f, x_j + \frac{\pi}{n} \right) - \sum_{i=1}^N \lambda_i S_n \left(h, x_j - x_i - \pi + \frac{\pi}{n} \right),$$

da cui per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(x_j - 0) - \lambda_j \pi - \sum_{i \neq j} \lambda_i h(x_j - x_i + \pi) &= g(x_j) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(f, x_j - \frac{\pi}{n} \right) - \lambda_j A \pi - \sum_{i \neq j} \lambda_i h(x_j - x_i + \pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_j + 0) + \lambda_j \pi - \sum_{i \neq j} \lambda_i h(x_j - x_i + \pi) &= g(x_j) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(f, x_j + \frac{\pi}{n} \right) + \lambda_j A \pi - \sum_{i \neq j} \lambda_i h(x_j - x_i + \pi), \end{aligned}$$

e semplificando si trova

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(f, x_j - \frac{\pi}{n} \right) - f(x_j - 0) &= -\frac{f(x_j + 0) - f(x_j - 0)}{2} (A - 1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \left(f, x_j + \frac{\pi}{n} \right) - f(x_j + 0) &= +\frac{f(x_j + 0) - f(x_j - 0)}{2} (A - 1). \end{aligned}$$

Quanto appena descritto è noto con il nome di *fenomeno di Gibbs*, anche se sarebbe più corretto chiamarlo *fenomeno di Gibbs-Wilbraham*: Wilbraham, infatti, aveva già scoperto questa particolarità, ma i suoi risultati apparvero quasi solo una curiosità e passarono pressoché inosservati. Solo sessant'anni dopo, per progredire nello sviluppo dei radar, si rese necessario studiare nel dettaglio la funzione h definita nelle pagine precedenti e il fenomeno venne definitivamente chiarito.

2.5 Funzioni di Bessel

2.5.1 La funzione Γ di Eulero

Prima di iniziare la descrizione delle funzioni di Bessel introduciamo qualche concetto che ci sarà utile nelle pagine successive, soprattutto nella dimostrazione della forma integrale delle funzioni di Bessel.

Definizione 2.5.1. La funzione Γ è definita da

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad \text{Re } x > 0.$$

Elenchiamo adesso alcune delle proprietà fondamentali di questa funzione.

1. La funzione Γ è analitica sul semipiano $\text{Re } x > 0$ e, integrando per parti, si trova

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x + 1) = x \Gamma(x);$$

dunque quando x è un numero naturale si ha

$$\Gamma(x + 1) = x!.$$

Questa formula permette di estendere la Γ analiticamente su $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, ponendo

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad \text{se } \operatorname{Re} x \in]-1, 0], x \neq 0$$

e in generale

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)\dots(x+k-1)} \quad \text{se } \operatorname{Re} x \in]-k, -k+1], x \neq -k+1, k \in \mathbb{N}.$$

2. Si ha

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Infatti, integrando n volte per parti si prova inizialmente che

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \operatorname{Re} x > 0.$$

Poi con $t = \frac{u}{n}$ si ricava

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^n \left(\frac{u}{n}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \frac{du}{n} = \frac{1}{n^x} \int_0^n u^{x-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du.$$

Quindi

$$\frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^n u^{x-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du$$

e per $n \rightarrow \infty$ si ha, per $\operatorname{Re} x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du = \Gamma(x).$$

Questa relazione vale in effetti per ogni $x \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$: infatti, utilizzando la proprietà (1), se $\operatorname{Re} x \in]-k, -k+1[$ si può scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)} = \\ & = \frac{n! n^{x+k-1}}{(x+k)(x+k+1)\dots(x+n+k)} \frac{(x+n+1)\dots(x+n+k)}{x(x+1)\dots(x+k-1)n^k} \end{aligned}$$

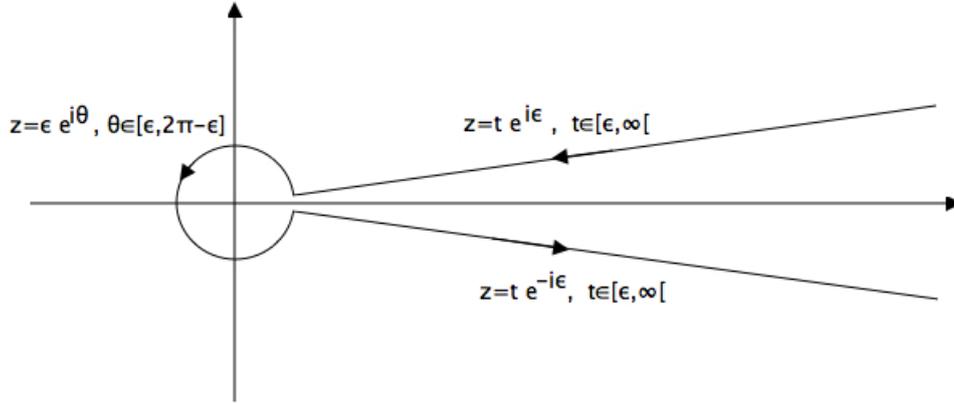
e dunque si deduce, per $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)} = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)\dots(x+k-1)} = \Gamma(x).$$

3. Si osserva anche che

$$\Gamma(x) = \frac{1}{e^{2\pi i x} - 1} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{x-1} dz, \quad \operatorname{Re} x > 0,$$

ove γ_ϵ è la curva descritta in figura.



Per verificare questo fatto, notiamo che la funzione integranda è olomorfa nella regione esterna a γ_ϵ , e tende a 0 quando $|z| \rightarrow \infty$ mantenendo $\text{Re } z > 0$. Quindi si verifica facilmente che se $\epsilon' \neq \epsilon$ l'integrale curvilineo non cambia. D'altra parte, l'integrale $\int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{x-1} dz$ può essere calcolato spezzandolo in tre integrali lungo i tre cammini, indicati nel disegno, in cui abbiamo diviso γ_ϵ . Risulta

$$I_1 = - \int_\epsilon^\infty e^{-te^{i\epsilon}} t^{x-1} e^{i\epsilon(x-1)} e^{i\epsilon} dt = -e^{i\epsilon x} \int_\epsilon^\infty e^{-t(\cos \epsilon + i \sin \epsilon)} t^{x-1} dt$$

ed osserviamo che si ha

$$I_1 \rightarrow - \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} e^{-\epsilon e^{i\theta}} \epsilon^{x-1} e^{i\theta(x-1)} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = \\ &= \epsilon^x \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} e^{-\epsilon \cos \theta - i\epsilon \sin \theta} e^{i\theta(\text{Re } x - 1) - \theta \text{Im } x} i e^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$

ed anche in questo caso si ricava

$$I_2 \rightarrow 0 \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0.$$

Infine

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_\epsilon^\infty e^{-te^{i(2\pi-\epsilon)}} t^{x-1} e^{i(2\pi-\epsilon)(x-1)} dt = \\ &= e^{i(2\pi-\epsilon)x} \int_\epsilon^\infty e^{-t \cos(2\pi-\epsilon) - it \sin(2\pi-\epsilon)} t^{x-1} dt, \end{aligned}$$

e risulta anche

$$I_3 \rightarrow e^{i2\pi x} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0.$$

Dunque, per la costanza dell'integrale curvilineo rispetto a ϵ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{x-1} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{x-1} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I_1 + I_2 + I_3] = \\ &= (e^{2\pi i x} - 1) \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = (e^{2\pi i x} - 1) \Gamma(x), \end{aligned}$$

e possiamo così concludere.

4. È valida la formula

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \forall x \in]0, 1[.$$

Dimostriamola: si ha

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds \int_0^\infty t^{-x} e^{-t} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1} t^{-x} e^{-(s+t)} ds dt.$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \psi = st \\ \eta = \frac{s}{t}; \end{cases}$$

il determinante dello Jacobiano è

$$\det \begin{pmatrix} \psi_s & \psi_t \\ \eta_s & \eta_t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{s}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t}(\eta + 1),$$

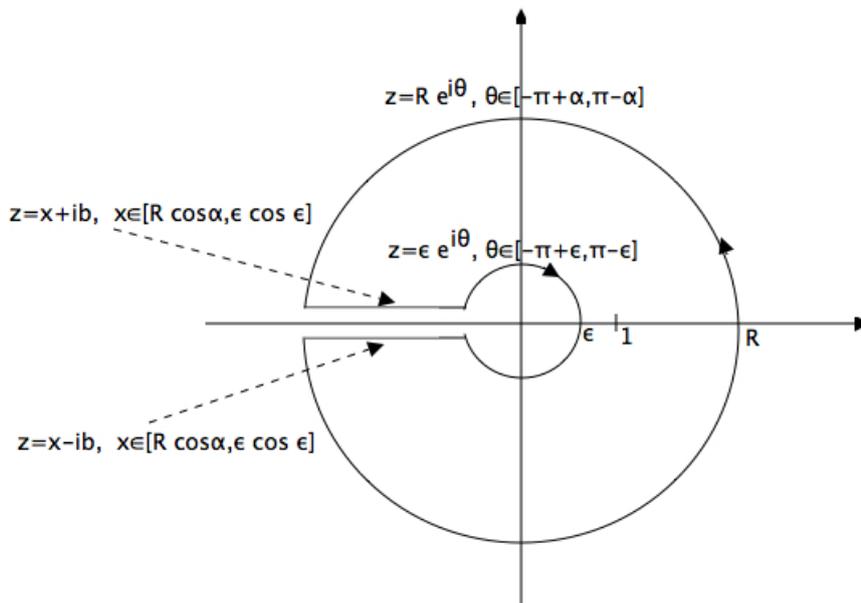
per cui $ds dt = \frac{t}{\eta+1}$. Quindi otteniamo

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \eta^x e^{-\psi} \frac{t}{s} \frac{d\psi d\eta}{\eta+1} = \int_0^\infty \int_0^\infty \eta^{x-1} \frac{e^{-\psi} d\psi}{\eta+1} d\eta = \int_0^\infty \frac{\eta^{x-1}}{1+\eta} d\eta.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale, suppondo $0 < x < 1$. Consideriamo

$$\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z} dz,$$

dove C è la curva in figura:



tenendo conto del residuo dell'integrando nel suo polo $z = 1$, si ha

$$\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = -2\pi i.$$

Perciò

$$\begin{aligned} -2\pi i &= \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{R^{x-1} e^{i\theta(x-1)}}{1 - Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_{R\cos\alpha}^{\epsilon\cos\epsilon} \frac{(t+ib)^{x-1}}{1-t-ib} dt + \\ &+ \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{\epsilon^{x-1} e^{i\theta(x-1)}}{1 - \epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta + \int_{\epsilon\cos\epsilon}^{R\cos\alpha} \frac{(t-ib)^{x-1}}{1-t+ib} dt, \end{aligned}$$

dove $\alpha = \arcsin(\frac{\epsilon}{R} \sin \epsilon)$ e $b = R \sin \alpha = \epsilon \sin \epsilon$. Il primo integrale è maggiorato da $2\pi \frac{R^x}{R-1}$, mentre il terzo è maggiorato da $2\pi \frac{\epsilon^x}{1-\epsilon}$, quindi entrambi tendono a 0 per $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$. Nel secondo integrale, scrivendo $(t+ib)^{x-1}$ come $\exp(x-1)[\log(\sqrt{t^2+b^2} + i \arg(t+ib))]$, l'integrando tende a $\frac{\exp(x-1)[\log(|t+i\pi|)]}{1-t} = e^{i\pi(x-1)} \frac{|t|^{x-1}}{1-t}$; ne segue, per convergenza dominata,

$$\int_{R\cos\alpha}^{\epsilon\cos\epsilon} \frac{(t+ib)^{x-1}}{1-t-ib} dt \rightarrow e^{i\pi(x-1)} \int_{-\infty}^0 \frac{|t|^{x-1}}{1-t} dt = e^{i\pi(x-1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{1-x}}{1+s} ds.$$

Analogamente si ottiene per il quarto integrale

$$\int_{\epsilon\cos\epsilon}^{R\cos\alpha} \frac{(t-ib)^{x-1}}{1-t+ib} dt \rightarrow e^{-i\pi(x-1)} \int_0^{\infty} \frac{|t|^{x-1}}{1-t} dt = -e^{-i\pi(x-1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{1-x}}{1+s} ds.$$

Pertanto al limite si conclude che

$$\begin{aligned} -2\pi i &= [e^{i\pi(x-1)} - e^{-i\pi(x-1)}] \int_0^{\infty} \frac{s^{1-x}}{1+s} ds = \\ &= -(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}) \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s} ds = -2i \sin \pi x \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s} ds, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s} ds = \frac{-2\pi i}{-2i \sin \pi x} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

il che prova quanto volevamo, cioè che

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \forall x \in]0, 1[.$$

Adesso estendiamo questa relazione, per prolungamento analitico, alla striscia

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in]0, 1[\}$$

e per continuità anche a

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, 1], z \neq 0, 1\}.$$

Supponiamo ora, induttivamente, di aver esteso la nostra relazione alla fascia

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, k], z \neq 0, 1, \dots, k\} \quad (k \in \mathbb{N});$$

allora se $\operatorname{Re} x \in]k + 1, k + 2[$ si ha $\operatorname{Re}(x - 1) \in]k, k + 1[$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi x} &= -\frac{\pi}{\sin \pi(x - 1)} = -\Gamma(x - 1)\Gamma(2 - x) = \\ &= -\frac{\Gamma(x)}{x - 1}\Gamma(1 - x)(1 - x) = \Gamma(x)\Gamma(1 - x). \end{aligned}$$

Adesso, per prolungamento analitico e continuità possiamo estendere alla striscia

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0, k + 1], z \neq 0, 1, \dots, k + 1\}.$$

Quindi vale

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad \text{con } \operatorname{Re} z \geq 0, z \notin \mathbb{N}.$$

Analogamente, se abbiamo esteso la relazione alla striscia

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [-k, 0], z \neq 0, -1, \dots, -k\},$$

allora per $\operatorname{Re} x \in]-k - 1, -k[$ si ha $\operatorname{Re}(x + 1) \in]-k, -k + 1[$ e quindi

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = -\frac{\pi}{\sin \pi(x + 1)} = -\Gamma(x + 1)\Gamma(-x) = -x\Gamma(x)\frac{\Gamma(1 - x)}{-x} = \Gamma(x)\Gamma(1 - x).$$

Quindi lo stesso vale per $\operatorname{Re} x \in [-k - 1, -k]$ e $x \neq -k, -k - 1$. In definitiva la formula vale in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

5. Infine possiamo dimostrare, utilizzando le proprietà (3) e (4) già dimostrate, che

$$\frac{1}{\Gamma(x + 1)} = \frac{e^{i\pi x}}{2\pi x} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{-x-1} dz,$$

dove γ_ϵ è la stessa figura del punto 3. Usando prima la proprietà (4) della funzione Γ , poi la (3), e successivamente la rappresentazione esponenziale per le funzioni seno e coseno, nonché le note proprietà trigonometriche, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x + 1)} &= \frac{\sin \pi(x + 1)}{\pi} \Gamma(-x) = \frac{\sin \pi(x + 1)}{\pi} \frac{1}{e^{-2\pi i x} - 1} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{-x-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}}{(e^{-2\pi i x} - 1)} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{-x-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{i}{\sin \pi x + i \cos \pi x} \right) \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{-x-1} dz = \frac{e^{i\pi x}}{2\pi x} \int_{\gamma_\epsilon} e^{-z} z^{-x-1} dz. \end{aligned}$$

2.5.2 Equazioni di Bessel

Possiamo adesso introdurre le funzioni di Bessel.

Definizione 2.5.2. Si definisce *equazione di Bessel di ordine n* la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Andiamo a vedere da dove nasce l'interesse per queste equazioni. Tra i problemi canonici che si riconducono alle equazioni di Bessel ci sono i problemi ai limiti per l'equazione

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

all'esterno o all'interno del cerchio $B(0, R)$ (o del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, se si lavora con tre variabili indipendenti). Questa equazione, come vedremo meglio in seguito, modella le vibrazioni proprie di una membrana circolare e quindi è importante nell'ambito degli strumenti a percussione.

Introduciamo le coordinate polari e riscriviamo l'equazione nella forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + k^2 u = 0$$

Ponendo $u(r, \psi) = R(r)\Phi(\psi)$ e separando opportunamente le variabili, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \\ \Phi'' + \lambda \Phi = 0. \end{cases}$$

La condizione di periodicità per $\Phi(\psi)$ ci porta a concludere che $\lambda = n^2$, dove n è un numero naturale. Se poniamo adesso $x = kr$ e $y(kr) = R(r)$, otteniamo facilmente l'equazione di Bessel

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

o equivalentemente

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Nel caso di soluzioni dotate di simmetria radiale (o cilindrica), si ottengono le equazioni di Bessel di ordine zero, cioè della forma

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + y = 0,$$

ovvero

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$

Consideriamo adesso, più generalmente, l'equazione di Bessel di ordine ν

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

o, analogamente,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

ove ν è un numero reale o complesso qualsiasi, la cui parte reale si può supporre non negativa. Cercheremo le soluzioni di questa equazione sotto forma di serie di potenze.

Osserviamo che in $x = 0$ l'equazione si abbassa di grado, dunque ci aspettiamo che la soluzione che troveremo sia sotto forma di una serie del tipo:

$$y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots),$$

ove σ è un esponente caratteristico da determinare. Sostituendo questa espressione nell'equazione di Bessel otteniamo un sistema di equazioni per determinare σ e tutti i coefficienti a_k :

$$\begin{cases} a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0, \\ a_1[(\sigma + 1)^2 - \nu^2] = 0, \\ a_k[(\sigma + k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0, \quad k > 1. \end{cases}$$

Se a_0 è diverso da 0, possiamo ricavare banalmente $\sigma = \pm\nu$, e di conseguenza nella seconda equazione deve essere $a_1 = 0$. La terza equazione fornisce allora una formula ricorrente per determinare i coefficienti a_k in funzione di a_{k-2} :

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)},$$

dalla quale si ricava subito che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli.

Se invece assumiamo $a_0 = 0$, dalla seconda equazione con $a_1 \neq 0$ segue $\sigma = -1 \pm \nu$ e vale ancora la formula ricorrente sopra scritta, dalla quale si ricava stavolta che tutti i coefficienti di indice pari sono nulli. Tuttavia la soluzione, quando $a_0 = 0$, diventa

$$y(x) = x^\sigma (a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots) = x^{\sigma+1} (a_1 + a_2 x + \dots + a_k x^{k-1} + \dots) =,$$

e quindi si ricade nel caso precedente con $\sigma + 1$ al posto di σ e a_{2k+1} al posto di a_{2k} . Dunque è sufficiente considerare il caso dei coefficienti di indice dispari tutti nulli.

Analizziamo il comportamento della soluzione, considerando dapprima il caso $\sigma = \nu$: possiamo esprimere ogni coefficiente di indice pari in funzione del precedente come segue

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^{2k}(k + \nu)},$$

ed applicando questa formula ripetutamente possiamo scrivere

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu + 1)(\nu + 2) \dots (\nu + k)}.$$

Ogni soluzione è quindi definita a meno della costante arbitraria a_0 . Ricordando che $\text{Re } \nu \geq 0$, scegliamo

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}.$$

Utilizzando la proprietà (1) della funzione Γ , precedentemente enunciata, possiamo riscrivere l'espressione di a_{2k} nel seguente modo:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}.$$

Indichiamo con $J_\nu(x)$ la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine ν per la quale $J_\nu(0) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$; inserendo i coefficienti appena determinati, otteniamo:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Questa soluzione prende il nome di *funzione di Bessel di prima specie di ordine ν* .

Una seconda soluzione si otterrà in corrispondenza di $\sigma = -\nu$; vediamo allora cosa succede in questo caso: chiaramente la soluzione sarà infinita per $x = 0$. Supponiamo anche $\nu \notin \mathbb{N}$. Allora ponendo stavolta

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$$

otteniamo

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}$$

e procedendo analogamente a prima otteniamo la seguente soluzione

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Facciamo un po' di osservazioni: innanzitutto si vede subito che $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ rappresentano due serie convergenti nell'intero piano complesso. Notiamo poi che la formula che definisce $J_{-\nu}(x)$ è stata definita solo per valori non interi di ν . Vogliamo adesso dimostrare che questa limitazione può essere superata: in effetti, se prolunghiamo l'espressione che definisce il valore di $J_{-\nu}(x)$ a $\nu = n$ con $n \in \mathbb{N}$, poiché $\Gamma(k-n+1) = \infty$ per $k \leq k_0 = n-1$, in realtà la sommatoria che stiamo calcolando inizia solo dal valore $k = k_0 + 1 = n$. Con la nuova variabile $k' = k - n$ otteniamo la nuova formula

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Dunque per $n \in \mathbb{N}$ le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti, al contrario di quanto accade per $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ quando ν non è intero: infatti $J_\nu(x)$ ha uno zero e $J_{-\nu}(x)$ un polo di ordine ν nel punto $x = 0$. Dunque per concludere possiamo dire che se ν non è intero ogni soluzione $y_\nu(x)$ dell'equazione di Bessel di ordine ν può essere rappresentata sotto forma di combinazione lineare delle funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$:

$$y_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{C},$$

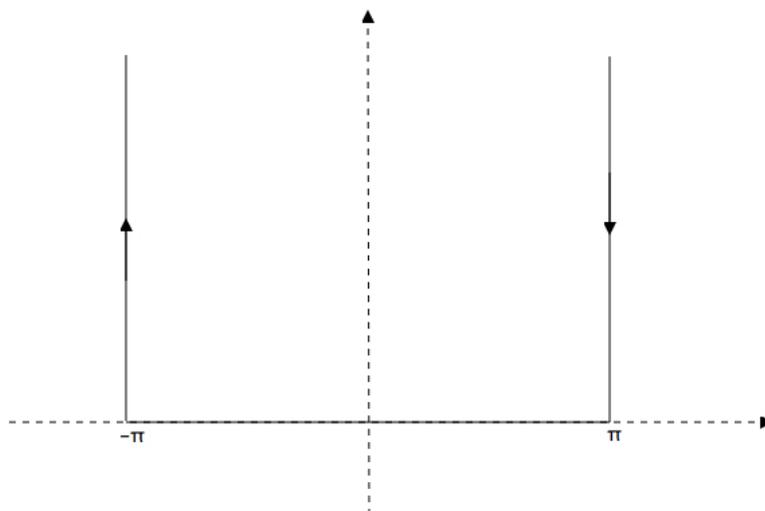
e se si cerca una soluzione limitata dell'equazione di Bessel allora, essendo $\operatorname{Re} \nu > 0$, si deve porre $c_2 = 0$ e la soluzione sarà $y_\nu(x) = c_1 J_\nu(x)$.

2.5.3 Rappresentazione integrale delle funzioni di Bessel

Fissato $\nu \in \mathbb{N}$, vogliamo ora rappresentare $J_\nu(x)$ in forma integrale: il nostro obiettivo sarà dimostrare che si ha

$$J_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi.$$

dove C_0 è la figura qui sotto.



Consideriamo

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \phi + i\nu\phi} d\phi.$$

Poniamo

$$r = \frac{x}{2} e^{-i(\phi-\pi)} = -\frac{x}{2} e^{-i\pi} :$$

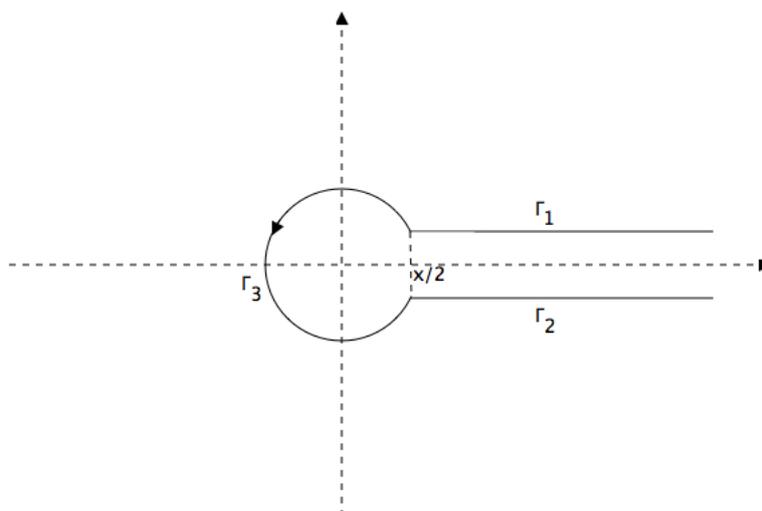
allora

$$dr = -\frac{x}{2} (-ie^{-i\phi}) d\phi = \frac{ix}{2} e^{-i\phi} d\phi = -ird\phi -$$

Vediamo adesso che valori assume r al variare dei valori di ϕ lungo il percorso C_0 :

ϕ	$\pi + i\infty$	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\pi + i\infty$
r	$+\infty$	$\frac{x}{2}$	$\frac{ix}{2}$	$-\frac{x}{2}$	$-\frac{ix}{2}$	$\frac{x}{2}$	$+\infty$

Quindi C_0 si trasforma nella curva γ descritta nella figura che segue:



e poichè vale

$$-ix \sin \phi = -\frac{ix}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = -\frac{x}{2} \left(-\frac{x}{2r} + \frac{2r}{x} \right) = \frac{x^2}{4r} - r,$$

il nostro integrale riscritto in funzione di r diventa:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{\pi} \int_{\gamma} e^{-r+\frac{x^2}{4r}} \left(\frac{-x}{2r}\right)^{\nu} i \frac{dr}{r} = \frac{-i(-1)^{\nu}}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_{\gamma} e^{-r+\frac{x^2}{4r}} \frac{1}{r^{1+\nu}} dr = \\
&= -i \frac{(-1)^{\nu}}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k} r^{-k} e^{-r}}{k!} \frac{dr}{r^{1+\nu}} = \\
&= \frac{-i}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \int_{\gamma} e^{-r} r^{-1-k-\nu} dr = \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{(-1)^{\nu} k! (k+\nu)!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 2J_{\nu}(x),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà (5) della funzione Γ .

Adesso calcoliamo di nuovo l'integrale con un metodo diretto, dividendo il cammino lungo il quale integriamo in tre parti $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, come già indicato nella figura precedente: le prime due illimitate, la terza limitata. L'idea è di dimostrare che il contributo dato da Γ_1 è uguale e opposto a quello dato da Γ_2 e dunque al calcolo del nostro integrale contribuirà effettivamente solo l'integrale lungo Γ_3 .

Eseguiamo innanzitutto il calcolo dell'integrale lungo Γ_1 : dunque vogliamo risolvere

$$I_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi.$$

Eseguendo il cambiamento di variabile $i\xi + \pi = \phi$ con $\xi \in [0, \infty[$ otteniamo

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ix \sin(i\xi+\pi) + i\nu(i\xi+\pi)} i d\xi = \\
&= \int_0^{\infty} e^{-ix(-\sin(i\xi)) - \nu\xi} (-1)^{\nu} d\xi = \frac{i}{\pi} (-1)^{\nu} \int_0^{\infty} e^{-x \sinh \xi - \nu\xi} d\xi,
\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato la relazione $\sin(i\xi + \pi) = -\sin i\xi = -\frac{e^{i(i\xi)} - e^{-i(i\xi)}}{2i}$ e nel terzo $-\sin i\xi = -\frac{(e^{-\xi} - e^{\xi})}{2i} = \frac{\sinh \xi}{i} = -i \sinh \xi$.

Svolgiamo adesso l'integrale lungo Γ_2 : procedendo analogamente otteniamo

$$I_2 = \frac{-1}{\pi} \int_{\Gamma_2} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi = -\frac{i}{\pi} (-1)^{\nu} \int_0^{\infty} e^{-x \sinh \xi - \nu\xi} d\xi.$$

Possiamo così concludere che $I_1 + I_2 = 0$. Resta allora l'integrale lungo Γ_3 :

$$I_3 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_3} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi.$$

Dunque utilizzando le due formule trovate per I concludiamo che:

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \phi + i\nu \phi} d\phi = I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \theta + i\nu \theta} d\theta = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Abbiamo così provato che la forma integrale per le funzioni di Bessel è:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \phi + i\nu\phi} d\phi.$$

Sviluppiamo l'esponenziale:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu\phi - x \sin \phi) d\phi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu\phi - x \sin \phi) d\phi.$$

Notiamo che, essendo il seno una funzione dispari ed essendo l'integrale su un intervallo simmetrico, possiamo dire che il secondo termine a secondo membro è nullo: dunque scopriamo che possiamo scrivere la funzione di Bessel J_ν in modo diverso: per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ si ha

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu\phi - x \sin \phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu\phi - x \sin \phi) d\phi.$$

Separiamo adesso il caso di ν pari da quello di ν dispari, ossia calcoliamo separatamente $J_{2\nu}(x)$ e $J_{2\nu+1}(x)$. Si ha

$$J_{2\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\nu\phi - x \sin \phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos 2\nu\phi \cos(x \sin \phi) + \sin 2\nu\phi \sin(x \sin \phi)] d\phi,$$

ma

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 2\nu\phi \sin(x \sin \phi) d\phi &= \int_0^{\pi} \sin 2\nu(\pi - \phi) \sin(x \sin(\pi - \phi)) d\phi = \\ &= - \int_0^{\pi} \sin 2\nu\phi \sin(x \sin \phi) d\phi = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$J_{2\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\nu\phi) \cos(x \sin \phi) d\phi.$$

Similmente,

$$\begin{aligned} J_{2\nu+1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos((2\nu + 1)\phi - x \sin \phi) d\phi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(2\nu + 1)\phi \cos(x \sin \phi) + \sin(2\nu + 1)\phi \sin(x \sin \phi)] d\phi, \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2\nu + 1)\phi \cos(x \sin \phi) d\phi &= \int_0^{\pi} \cos(2\nu + 1)(\pi - \phi) \cos(x \sin(\pi - \phi)) d\phi = \\ &= - \int_0^{\pi} \cos(2\nu + 1)\phi \cos(x \sin \phi) d\phi = 0 \end{aligned}$$

e dunque

$$J_{2\nu+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2\nu + 1)\phi \sin(x \sin \phi) d\phi.$$

Abbiamo così scoperto che le funzioni $J_{2\nu}(x)$ costituiscono tutti e soli i coefficienti di Fourier non nulli della funzione $f(\phi) = \cos(x \sin \phi)$, mentre le $J_{2\nu+1}(x)$ sono tutti e soli i coefficienti di Fourier non nulli di $g(\phi) = \sin(x \sin \phi)$. Allora, utilizzando le proprietà note sulle serie di Fourier per funzioni pari e per funzioni dispari, possiamo scrivere le serie di Fourier di f e g ottenendo:

$$\cos(x \sin \phi) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu}(x) \cos 2\nu\phi, \quad \sin(x \sin \phi) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(x) \sin(2\nu + 1)\phi.$$

Quanto appena descritto mette alla luce un aspetto molto importante delle funzioni di Bessel; abbiamo dimostrato che esse sono i coefficienti di Fourier per certe funzioni e come tali costituiscono delle frequenze. Le funzioni di Bessel infatti non sono altro che le frequenze fondamentali delle percussioni. In molti strumenti musicali, tipicamente nelle percussioni e soprattutto nei timpani e nei tamburi, la membrana costituente è circolare. L'equazione, in coordinate polari, dell'onda che attraversa una membrana circolare è, ricordando quanto abbiamo visto all'inizio del paragrafo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

e possiamo cercare una soluzione della forma

$$z(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi) \cos(\omega t);$$

sostituendo nell'equazione dell'onda, le variabili possono essere separate e l'equazione per la funzione R è un'equazione di Bessel che determina il profilo radiale della membrana.

2.5.4 Proprietà delle funzioni di Bessel

Cerchiamo ora di determinare relazioni tra le funzioni di Bessel di diversi ordini e le loro derivate. Dimostriamo, per cominciare, che

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

Questa formula si può provare derivando direttamente le serie di potenze che esprimono le funzioni di Bessel. Infatti

$$x^\nu \frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = x^\nu \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k) \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu},$$

Posto $k' = k - 1$, si ha

$$x^\nu \frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = - \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k' + 1) \Gamma(k' + \nu + 2)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k'+\nu+2} = -J_{\nu+1}(x).$$

In modo analogo si dimostra che

$$\frac{d}{dx} (J_\nu(x)x^\nu) = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

Stabiliremo ora due formule ricorrenti che legano le funzioni $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ e $J_{\nu-1}(x)$.
Risulta

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x), \quad \frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x).$$

Infatti

$$J'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + \nu) x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu)2^{2k+\nu}},$$

mentre

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu)2^{2k+\nu}},$$

da cui

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu)2^{2k+\nu}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k)\Gamma(k+1+\nu)2^{2k+\nu-1}} = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1} x^{2h+\nu+1}}{\Gamma(k)\Gamma(k+1+\nu)2^{2h+\nu+1}} = -J_{\nu+1}(x); \end{aligned}$$

similmente

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + 2\nu) x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu)2^{2k+\nu}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu)2^{2k+\nu-1}} = J_{\nu-1}(x). \end{aligned}$$

Ciò prova le due formule.

Da queste due relazioni si deduce subito, per somma, che

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x),$$

mentre, per differenza,

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x).$$

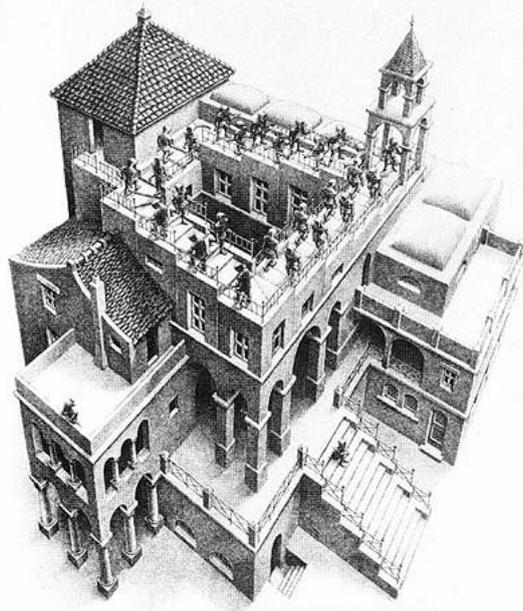
Capitolo 3

I paradossi musicali

Questo avrebbe dovuto essere, all'inizio, il tema dominante di questa tesi; purtroppo però, oltre alla difficoltà di trovare materiale su questi argomenti, gran parte di ciò che siamo riusciti a recuperare riporta qualche esperimento di tipo musicale, riportato senza troppi dettagli e soprattutto senza adeguate motivazioni. Gli esperimenti, che in alcuni casi siamo anche riusciti a riprodurre, creano sì un certo effetto nell'orecchio di chi ascolta, ma sembrano non avere nè una spiegazione logica, nè tantomeno una spiegazione matematica approfondita. Cercheremo comunque di trattare questo argomento, nel modo più dettagliato e più matematico possibile.

3.1 Paradosso di Shepard

La scala senza fine visibile in questa immagine di Escher è un classico paradosso visivo: alcuni vedono gli uomini disegnati salire le scale, altri li vedono scendere, e una stessa persona può a un primo sguardo vedere gli uomini salire le scale e in un secondo momento vederli invece scendere, senza riuscire a capire dove sia il tranello visivo. Simili paradossi si possono trovare nei suoni: tra i più famosi c'è quello di Shepard. All'inizio del 1960 Roger N. Shepard nei *Bell Telephone Laboratories* produsse un esempio piuttosto notevole. Egli prese una sequenza di toni in una certa ottava e ripeté questa sequenza ogni volta aumentando di un'ottava. Invece di sentire il modello stopparsi per poi ripartire gli ascoltatori sentirono il modello crescere indefinitamente, e quando Shepard invertì la direzione dei suoni si sentì il modello diminuire, sempre indefinitamente.



Parliamo ora della percezione delle altezze dei suoni. Come si ricava dall'analisi di Fourier, l'altezza di un suono puro, avente cioè forma d'onda sinusoidale, è caratterizzata banalmente dalla sua frequenza. È allora interessante studiare la percezione dell'altezza di suoni composti, costituiti cioè dalla sovrapposizione di onde armoniche. Il matematico olandese Schouten attorno al 1939 pubblicò i risultati dei suoi esperimenti sulla percezione dell'altezza dei suoni. È stato dimostrato che l'idea generalmente accettata che le componenti della frequenza fondamentale di un tono complesso determinino l'altezza del suono prodotta dal tono è insostenibile. Ascoltando un tono complesso, Schouten osservò che, a parte le armoniche più basse, udibili a tutti, c'era un altro suono più difficile da udire, con un'altezza corrispondente alla frequenza fondamentale. Egli concluse che l'altezza di questo nuovo elemento percettivo che aveva scoperto dovesse giungere dall'azione combinata delle onde armoniche più alte. Egli chiamò la sensazione collettiva dovuta a questo gruppo di armoniche il *residuo* ("the residue"). Questa conclusione fu supportata dagli studi di Boer (1956) sui complessi non armonici. Secondo la sua opinione il numero più piccolo di frequenze necessarie per ottenere un residuo stabile e chiaro è 5, al contrario di quanto afferma Ritsma, secondo il quale ne bastano 3.

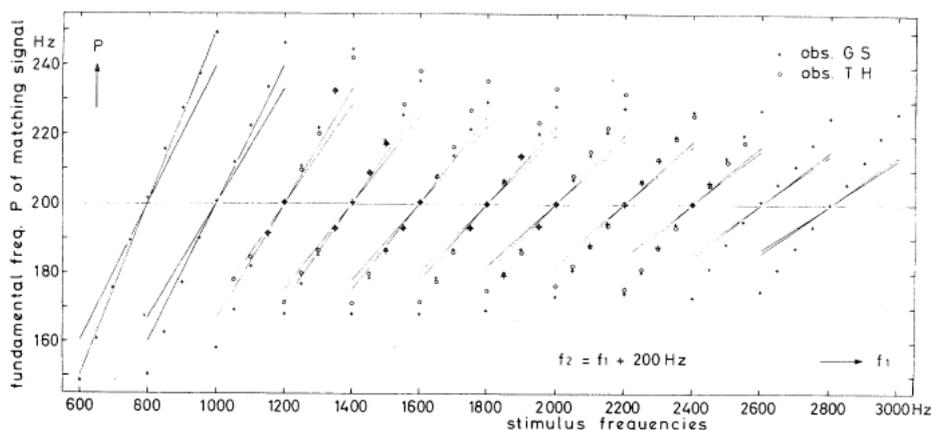
Sembra esserci una grossa disparità nella percezione dell'altezza di un tono complesso. Alcuni recepiscono il suono complesso come un unico suono, altri invece recepiscono altezze di diversi suoni distinti. Per dare una spiegazione a questo fenomeno 42 soggetti sono stati sottoposti al seguente esperimento: attraverso auricolari posti a un livello di 40 dB, vennero fatti ascoltare due toni ciascuno della durata di 160 ms, il primo consistente nelle frequenze $f_1, f_2 = 1750, 2000$ Hz e il secondo 1800, 2000 Hz. I soggetti che recepirono questo suono come un tutt'uno sentirono una caduta dell'altezza corrispondente alle frequenze fondamentali (f_1 e f_2) rispettivamente di 250 Hz e 200 Hz. Gli altri invece sentirono un aumento dell'altezza corrispondente a un cambiamento nelle frequenze più basse.

L'esperimento mostra che esattamente la metà sente il tono complesso come un tutto mentre l'altra metà sente il suono come parte di qualcosa. La ripetizione dello stesso esperimento un mese dopo dà di nuovo lo stesso risultato.

L'SPL (livello di pressione sonora) di ciascuna delle due componenti dei due toni è di circa 40 dB sopra la soglia di udibilità. A questo livello non è immaginabile che il tono corrispondente alla differenza $f_1 - f_2$ giochi un ruolo nella percezione del suono. Inoltre il risultato per stimoli con una frequenza costante, per esempio pari a 200 Hz, mostra una variazione nell'altezza che indica che non può essere la differenza di tono a causare l'altezza recepita.

Sofferamoci un attimo su una peculiarità importante del nostro apparato uditivo: l'orecchio umano è un amplificatore non lineare ad alta distorsione. Quindi, in generale, dati due segnali (supposti di uguale ampiezza) e frequenza f_1, f_2 , si generano dei prodotti di intermodulazione, dovuti appunto alla non linearità, di diverso ordine: del secondo ordine, a frequenze $f_1 - f_2$ e $f_2 - f_1$, del terzo ordine a frequenze $2f_1 - f_2$ e $2f_2 - f_1$ e degli ordini successivi, oltre alle armoniche $2f_1, 2f_2, 3f_1, 3f_2$, eccetera, multiple delle frequenze fondamentali.

Prendiamo due tra gli osservatori che nel primo esperimento hanno udito il suono come un tutt'uno e facciamo ascoltare loro una serie di coppie di toni f_i, f_j , ciascuno con una differenza di frequenza costante e per esempio pari a 200 Hz, dunque tali che $f_j - f_i = 200$ Hz. L'altezza espressa in funzione della frequenza fondamentale P del segnale armonico recepito sembra essere indipendente dai diversi segnali, inarmonici, che si ottengono, e dunque possiamo disegnare l'area in cui ci aspettiamo di trovare l'altezza in questione.



Un'altezza pari a 200 Hz si trova anche quando le frequenze f_1, f_2 sono interi multipli della frequenza $f_2 - f_1$ e cioè dunque se $f_2 - f_1 = k$; questa situazione si presenta quando $f_1 = mk$ e di conseguenza $f_2 = (m + 1)k$ con m intero positivo. Ci metteremo proprio in quest'ultimo caso e analizzeremo cosa succede quando si spostano le frequenze dei nostri toni rispetto a questa situazione centrale. La periodicità dello stimolo che stiamo studiando corrisponde esattamente a 200 Hz; dunque le altezze uguali in questo caso sono facilmente comprensibili sulla base di una teoria della periodicità delle altezze dei suoni. Lo stimolo è descritto da:

$$S(t) = A \cos 2\pi f_1 t + A \cos 2\pi f_2 t = 2A \cos 2\pi \frac{f_2 - f_1}{2} t \cos 2\pi \frac{f_2 + f_1}{2} t.$$

Possiamo interpretare il segnale come un'onda sinusoidale di frequenza $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ di ampiezza $|2A \cos \frac{1}{2}(f_2 - f_1)t|$ e con una fase che cambia di 180° ogni volta che l'ampiezza è zero. Se le frequenze sono multipli della frequenza fondamentale g , per esempio $f_1 = ng$

e $f_2 = (n + 1)g$, lo stimolo è:

$$S(t) = 2A \cos \frac{1}{2} 2\pi g t \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) 2\pi g t$$

Qui di sotto presentiamo cosa accade per $n = 7$. La periodicità è data da g perché nell'intervallo di tempo $\tau = \frac{1}{g}$ avvengono $7\frac{1}{2}$ oscillazioni e la fase passa da 180° a 0° .

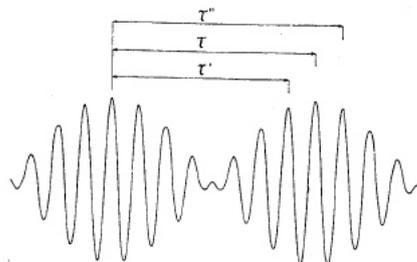


Fig. 2. The waveform of a two-tone stimulus consisting of the 7th and 8th harmonics with equal amplitudes. Between different peaks there are indicated several time intervals τ , τ' , and τ'' which can be related to pitches produced by this signal.

La periodicità g si perde quando entrambe le frequenze vengono spostate rispetto alla situazione armonica centrale $f_1 = ng$ e $f_2 = (n + 1)g$. L'altezza sembra essere strettamente correlata all'intervallo di tempo che intercorre tra due picchi dell'onda. Diversi intervalli di tempo sono ottenuti prendendo diversi picchi. Per esempio l'altezza corrispondente all'intervallo di tempo τ è determinata da $(n + \frac{1}{2})$ oscillazioni di una frequenza pari a $(n + \frac{1}{2})g$. Se spostiamo di Δf la nostra frequenza, l'intervallo di tempo sarà allora determinato sempre da $n + \frac{1}{2}$ oscillazioni ma stavolta con frequenza $(n + \frac{1}{2})g + \Delta f$. Dunque quello che ci aspettiamo è un picco traslato di $\frac{\Delta f}{n+1}$ rispetto al precedente. Questa supposizione è vera, ma vale solo per componenti con la stessa ampiezza. In generale non è detto che le due frequenze che costituiscono il tono complesso abbiano la stessa ampiezza e quello che generalmente accade è che l'altezza che si recepisce è alla fine determinata solo da una delle due frequenze componenti. Ciò corrisponde ad uno spostamento dell'altezza di $\frac{\Delta f}{n}$ o di $\frac{\Delta f}{n+1}$, a seconda di quale sia la componente che determina l'altezza recepita. Tutto ciò ci porta a concludere che in realtà lo spazio, in cui, secondo la nostra prima supposizione, vive l'altezza del suono complesso, non è individuato in modo del tutto corretto: la differenza tra l'area in cui si trova realmente l'altezza e quella in cui era stata prevista è, in generale, di circa 1.2 Hz e spesso dipende da $|\Delta f|$.

3.2 Paradosso dei frattali

Partiamo di nuovo di un paradosso visivo per descrivere poi un analogo paradosso musicale. L'immagine sottostante è un frattale, cioè un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse; in altre parole è una figura che è unione di un numero di parti che, ingrandite di un certo fattore, riproducono la figura stessa. Questa caratteristica è spesso chiamata auto-similarità. Il termine frattale venne introdotto nel 1975 da Mandelbrot. Si usa il termine frattale anche per funzioni che sono ovunque continue ma non derivabili in tutto lo spazio in cui sono definite. L'immagine sottostante è formata da sette esagoni in cui ogni lato, di lunghezza L , viene spezzato in tre segmenti lunghi $L/\sqrt{7} \simeq 0.37796$. Ripetendo questo procedimento all'infinito su ogni bordo otteniamo una figura frattale auto-simile. Il perimetro dell'intera figura è uguale a 3 volte il perimetro di una delle sette componenti mentre l'area totale è solo 7 volte

quella di ogni sua parte e non 9. Questo è un paradosso, dovuto ai bordi frattali, che contrasta con la teoria euclidea. I contorni di questa figura sono localmente grafici di funzioni ovunque continue ma non ovunque derivabili, e la loro dimensione di Hausdorff è compresa tra 1 e 2. Infatti $d = \log 3 / \log \sqrt{7} \simeq 1.12915$, il valore necessario per risolvere il paradosso menzionato.

Facciamo una breve parentesi sul significato di dimensione di Hausdorff. Dato un sottoinsieme E di \mathbb{R}^N si definisce *dimensione di Hausdorff* il numero

$$\dim_H(E) = \inf\{p > 0 : H_p^*(E) = 0\},$$

dove $H_p^*(E)$ è la *dimensione esterna di Hausdorff*, la cui definizione è:

$$H_p^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{p,\delta}^*(E) = \sup_{\delta > 0} H_{p,\delta}^*(E),$$

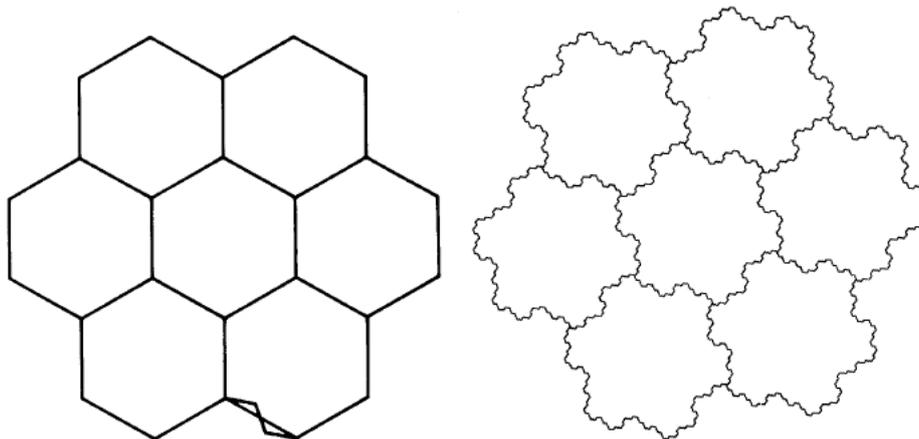
ove

$$H_{p,\delta}^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam} U_n)^p : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n, U_n \text{ aperti, } \text{diam} U_n < \delta \right\}.$$

Si può verificare che per un insieme E la funzione $p \mapsto H_p^*(E)$ ha il seguente andamento: esiste $p_0 \in [0, N]$ tale che

$$H_p^*(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \in [0, p_0[\\ \lambda & \text{se } p = p_0 \\ 0 & \text{se } p \in]p_0, N], \end{cases}$$

ove λ è un opportuno numero non negativo, finito o infinito. Tale p_0 è appunto la dimensione di Hausdorff dell'insieme E .



Passiamo ora al paradosso musicale: consideriamo la funzione di Weierstrass

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cos(\beta^k t)$$

Al variare dei parametri β e γ , Weierstrass dimostrò che esistono funzioni ovunque continue ma mai differenziabile. A noi interessa il caso in cui la funzione che stiamo studiando

rappresenta un suono udibile: dobbiamo quindi imporre che k ricopra solo la gamma audio e dunque che $20 \leq \frac{2^k \frac{13}{12}}{2\pi} \leq 20000$ Hz, avendo supposto di misurare t in secondi. Dunque la nostra è una sommatoria finita e, in questo caso, possiamo supporre che l'ampiezza sia costante, e prendere $\gamma = 1$. Si osserva che allora $w(\beta t) = w(t)$ e cioè che la funzione è auto-simile.

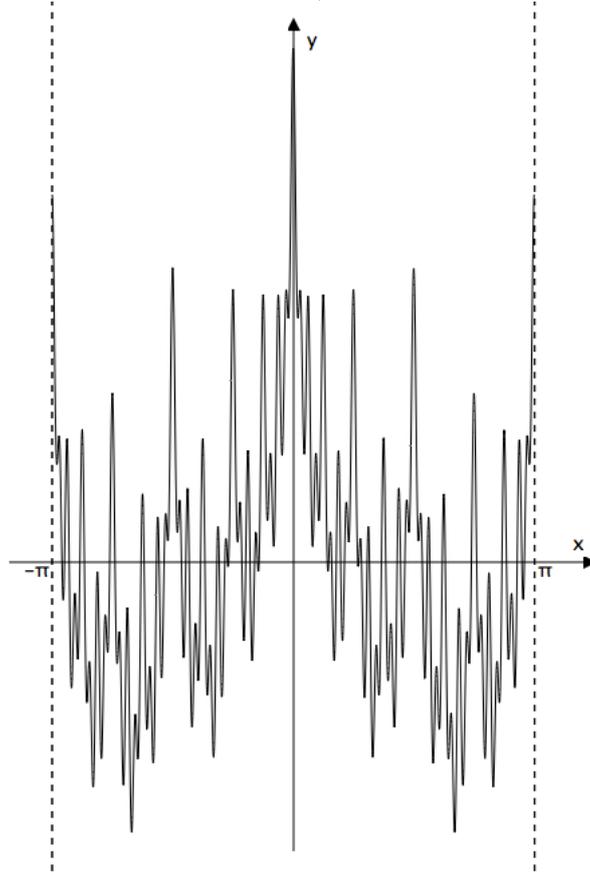
Se consideriamo, infatti

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\beta^k t)$$

(dove, qui e nel seguito, i termini della somma sono da considerare nulli quando k assume valori corrispondenti a frequenze non udibili) e diminuiamo la grandezza del tempo t nell'equazione della funzione di un fattore β , otteniamo

$$w(\beta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\beta^{k+1} t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\beta^k t) = w(t)$$

e dunque $w(t)$ è auto-simile. La auto-similarità di questa funzione è illustrata nella figura sottostante che illustra un periodo di w con $\gamma = 1$, $\beta = 2$ e $k = 1, \dots, 6$.



Supponiamo adesso $\beta = 2^{\frac{13}{12}}$: avremo

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2^{k \frac{13}{12}} t),$$

avendo supposto di misurare t in secondi. Raddoppiando la velocità di esecuzione si ottiene

$$w(2t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2^{k\frac{13}{12}+1}t) = \sum_{k'=1}^{\infty} \cos(2^{k'\frac{13}{12}} \cdot 2^{-\frac{1}{12}}t) = w(2^{-\frac{1}{12}}t)$$

dove $k' = k + 1$. Se la frequenza copre l'intera gamma audio quello che riesce a sentire l'orecchio umano è

$$w(t) = w(2^{-\frac{1}{12}}t).$$

Così il raddoppiare della velocità produce un suono con un'altezza abbassata di un fattore $2^{-1/12}$, e l'accordo verrà emesso circa un semitono più in basso anziché un'ottava sopra. Esaminiamo questo paradosso nel dettaglio. Consideriamo $w(\beta t)$ con 11 frequenze che vanno da 10.0 Hz fino a $2^{130/12} \cdot 10 \simeq 18245.6$ Hz. Raddoppiando la velocità di riproduzione la sesta componente, per esempio, subisce un cambio di frequenza passando da 427.15 a 854.3 Hz. Confrontando i due accordi, quello iniziale e quello con la velocità raddoppiata, l'orecchio umano identifica la “nuova” sesta componente come la settima dell'accordo originale, la cui frequenza è 905.1 Hz. Osserviamo che la nota la cui frequenza è 854.3 Hz (la sesta componente del “nuovo” accordo) è esattamente un semitono più basso rispetto a quella la cui frequenza è 905.1 Hz (la settima componente dell'accordo originale), e dunque ciò che si percepisce, in conclusione, è un'altezza ridotta.

Usando un diverso fattore, per esempio $\beta = 2^{\frac{14}{12}}$, e ripetendo lo stesso esperimento, quello che si sente è un accordo suonato due semitoni più basso; similmente $\beta = 2^{\frac{15}{12}}$ produrrà un accordo tre semitoni più basso rispetto all'originale, e così via. Se però β cresce troppo avvicinandosi al valore $2^{\frac{24}{12}} = 4$, la percezione inizia a diventare ambigua e per $\beta = 4$ si sente un accordo che è considerato ugualmente un'ottava sopra o un'ottava sotto.

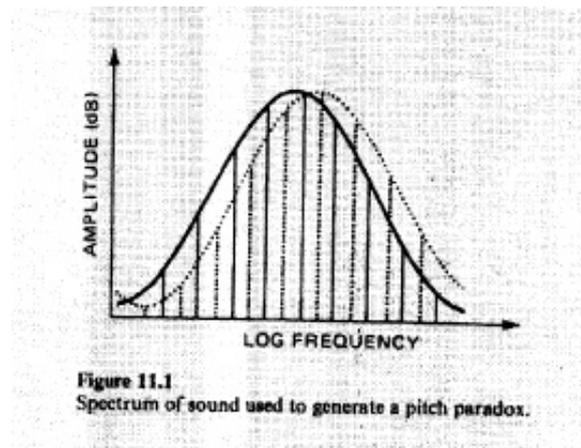
3.3 Paradosso di Risset

Risset presentò tre diversi esempi di paradossi musicali. Il primo consiste in una variazione del paradosso di Shepard, il secondo consiste in un battito che viene velocizzato indefinitamente e il terzo consiste in un suono che dura 40 secondi e che presenta molte caratteristiche paradossali.

Risset sintetizzò tramite il programma MUSIC V un suono che “scende la scala” ma finisce in un passo più alto.

3.3.1 Effetto dell'altezza

Esso è ottenuto aggiungendo 9 componenti sinusoidali con frequenze $f, 2f, 2^2f, \dots, 2^8f$. All'inizio del suono si ha $f = 31.25$ Hz, così che le frequenze componenti il suono sono 31.25 Hz, 62.5 Hz, 125 Hz, ..., 8000 Hz. La frequenza fondamentale diminuisce di due ottave seguendo una curva esponenziale discendente che diminuisce di un'ottava ogni 20 secondi. Quindi tutte le componenti scivolano lungo la scala mantenendo però l'una dall'altra le distanze iniziali. Allo stesso tempo l'ampiezza di ogni componente è controllata separatamente al fine di spostare il picco dello spettro verso le alte frequenze. La figura sottostante, in cui l'ampiezza di ogni componente viene vista come una funzione della sua frequenza, mostra quanto appena detto.



La scala con cui misuriamo le frequenze è una scala logaritmica; l'involuppo spettrale è una curva a forma di campana con valori estremi di circa 80 dB sotto il picco. Le linee continue che vediamo nell'immagine mostrano le componenti del suono all'inizio, mentre quelle tratteggiate le rappresentano dopo 10 secondi; le frequenze di tutte le componenti sono diminuite di mezza ottava, mentre l'involuppo spettrale si è spostato verso l'alto di un'ottava. Così tutte le dieci componenti scivolano due ottave in basso "restando a intervalli di un'ottava", mentre i picchi salgono di circa 4 ottave.

3.3.2 Effetto ritmico

Il paradosso del ritmo è molto simile al paradosso del passo enunciato prima. Si realizza modificando l'ampiezza del suono attraverso una successione di battiti. Diversi battiti, dunque, a distanze di "ottave ritmiche", si sovrappongono uno all'altro. Con "ottava ritmica" intendiamo che i loro rispettivi tassi di riproduzione, supponendo che il primo sia r , sono: r , $2r$, $4r$, $8r$, eccetera.

Nell'esempio riportato da Risset, e che siamo riusciti a riprodurre attraverso un programma in C, i battiti rappresentati sono 5: all'inizio del suono si ha $r = 1.25$ Hz, così che il numero dei battiti per secondo è rispettivamente 1.25, 2.5, 5, 10 e 20 per ognuno dei cinque battiti suonati simultaneamente. Inizialmente il battito più lento è quello con l'ampiezza dominante. Diminuiamo ora r regolarmente dividendolo per 8 in 40 secondi, e notiamo che il picco della distribuzione dell'ampiezza è una curva a forma di campana che garantisce un passaggio graduale da una battuta dominante a una con un tasso di ripetizione due volte più veloce. I picchi si spostano da una componente all'altra battendo due volte più veloce in meno tempo di quello impiegato da r per essere dimezzato. Nel nostro esempio, per il tasso fondamentale ci vogliono 13 secondi per diminuire di un fattore 2, mentre per la distribuzione dell'ampiezza ci vogliono solo 6.5 secondi per passare da una componente a una che è due volte più veloce. Così, mentre i battiti rallentano, tutti quelli più veloci diventano dominanti; durante i 40 secondi in cui c'è il suono, r si rallenta di un fattore 4 e alla fine il battito dominante è quattro volte più veloce di quello iniziale.

3.3.3 Effetto spaziale

Dato un suono, parte di esso (il 15% della sua ampiezza) viene inviato a un riflettore di suoni, e il suono stesso è alimentato in egual misura dal canale destro e da quello sinistro,

così da produrre uno “ stereo suono”. Entrambi i canali sono modulati in ampiezza da due diverse funzioni del tempo come mostrato in figura:

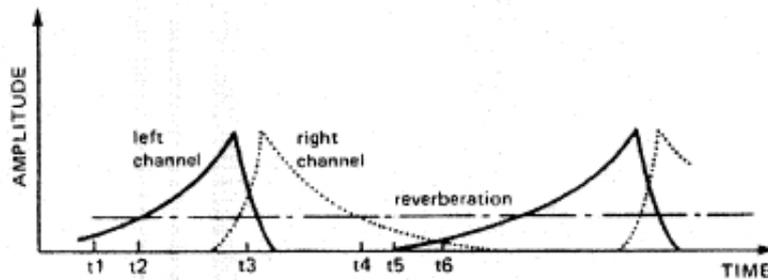


Figure 11.2
Amplitude and reverberation functions used to control apparent spatial location of sound.

La linea tratteggiata controlla l’ampiezza del suono diretto nel canale destro, mentre quella continua rappresenta il suono diretto presente nel canale sinistro. La linea parallela all’asse x indica il livello del riverbero del suono, che è approssimativamente costante. Al tempo t_1 il suono arriva solo dal canale destro ed il suo livello è minore del livello del riverbero del suono: questo fa sì che il suono sembri arrivare da una sorgente situata sul lato sinistro, più lontana rispetto alla posizione reale. Poi il suono diretto aumenta e al tempo t_2 esso supera il livello di riverbero e dà l’idea che il suono sia generato da una sorgente sempre più vicina. Avvicinandoci al tempo t_3 , il livello del suono che arriva dal canale destro diminuisce drasticamente e aumenta invece quello che proviene dal canale sinistro, e sembra che la sorgente del suono si sposti rapidamente da sinistra verso destra con una velocità che dipende dalla pendenza degli inviluppi del canale destro e sinistro. Successivamente al tempo t_4 il livello del suono diretto proveniente dal canale destro diminuisce e si trova al di sotto del livello del riverbero, e così al tempo t_5 dal canale sinistro viene generato un suono ed esso inizia a crescere. Al tempo t_6 esso supera il livello del suono diretto generato dal canale destro, così che la sorgente del suono sembra muoversi da destra verso sinistra, ma molto più lontano rispetto alla posizione reale, perché il livello del suono in entrambi i canali è molto più basso rispetto al suono del riverbero.

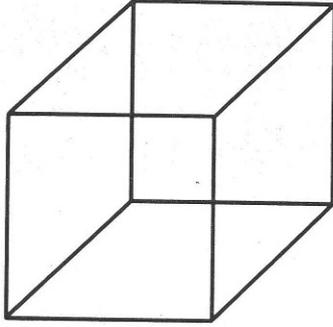
Capitolo 4

Illusione: errore dei sensi, verità della percezione

4.1 Destri e mancini

Concludiamo questa discussione descrivendo alcune differenze molto interessanti nella percezione dei suoni.

Per esempio, è stato scoperto, tramite un esperimento condotto dalla psicologa Diana Deutsch, che destri e mancini percepiscono le illusioni musicali in modo diverso. Per eseguire l'esperimento un computer è stato programmato per controllare due generatori di onde sinusoidali in modo che il tono potesse sempre essere regolato in ampiezza, durata e frequenza, e le sequenze di toni vennero presentate agli ascoltatori tramite auricolari, così che quando un orecchio, per esempio il destro, ascoltava un tono, il sinistro contemporaneamente udiva l'altro tono. La sequenza che venne fatta ascoltare durava 20 secondi ed era costituita dall'alternarsi di due toni, ciascuno suonato per un quarto di secondo, uno di frequenza 800 Hz, l'altro 400 Hz. Questa sequenza di toni venne presentata simultaneamente a entrambe le orecchie, e alla stessa ampiezza. Nonostante questo, la sequenza recepita da un orecchio risultava comunque fuori fase rispetto quella percepita dall'altro: quando, infatti, un orecchio sentiva il tono più alto, l'altro sentiva quello più basso e viceversa. Solo una persona su cento riuscì a descrivere correttamente i due toni presenti nella sequenza, mentre la maggior parte sentì un unico singolo suono passare da un orecchio all'altro, cioè sentì alternativamente il tono alto in un orecchio e quello basso nell'altro e così via. Si provò poi a invertire gli auricolari e quasi tutti continuarono a sentire i suoni esattamente come prima: l'orecchio che prima udiva il tono alto continuava a udire il tono alto e così per l'altro orecchio, però la sensazione fu che l'auricolare che prima emetteva il suono alto ora emettesse quello basso e viceversa. Nonostante, come appena detto, la maggior parte delle persone tende a localizzare un tono in un orecchio e l'altro tono nell'altro orecchio può capitare, ed anzi spesso capita, che dopo un po' questa situazione venga capovolta, e che dopo un altro po' di tempo la situazione possa capovolgersi di nuovo, tornando così a quella iniziale. Un analogo paradosso visivo che chiarisce questo fenomeno è il cubo di Necker, dove la faccia posteriore diventa periodicamente la faccia frontale.



I destri sentirono il suono alto nell'orecchio destro e quello basso in quello sinistro e mantennero questa percezione anche dopo il cambio degli auricolari; i mancini invece localizzarono il suono alto indifferentemente nell'orecchio destro o sinistro. Questa differenza può essere spiegata osservando che per i destri l'emisfero dominante del cervello è il destro, e che l'imput primario sonoro arriva dunque dall'orecchio destro, mentre al contrario per i mancini entrambi gli emisferi sono dominanti. Quindi sembra che le persone sentano il tono alto arrivare dall'orecchio che manda i segnali più forti all'emisfero dominante, e il tono basso giungere dall'orecchio che invia invece i segnali più forti all'emisfero non dominante.

4.2 Il paradosso del tritone

Descriveremo adesso il cosiddetto “paradosso del tritone”, e come esso venga sentito in maniera diversa da due gruppi di persone con culture diverse. Scoperto dalla psicologa Diana Deutsch, questo paradosso si trova su alcune riviste scientifiche, quali “Music Perception” e “Perception & Psychophysics”. Il paradosso del tritone consiste in due toni che distano metà di un'ottava (detta anche tritone) presentati uno di seguito all'altro. Ogni tono è composto da una insieme di armoniche tutte distanti tra di loro esattamente un'ottava, le cui ampiezze sono determinate da un involuppo spettrale a forma di campana. Quando agli ascoltatori viene fatto sentire questo paradosso, viene chiesto loro di dire se sentono il modello salire o scendere, e le loro risposte mostrano come essi sentano i toni in relazione alla loro posizione lungo il “cerchio della classe delle altezze”, che illustriamo qui di seguito:

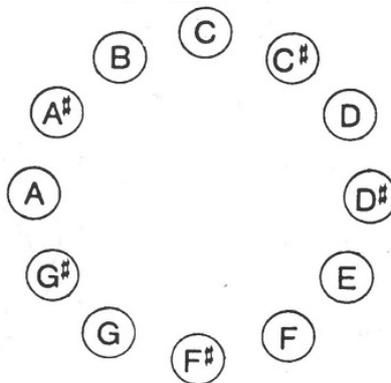


Figure 1. The pitch class circle.

In base alla regione del cerchio in cui si trovano i toni, essi vengono sentiti come i più alti o i più bassi, e corrispondentemente, i suoni nella parte del cerchio opposta a questa

regione saranno recepiti come, rispettivamente, i più bassi o i più alti. Nonostante ciò vi è però una sostanziale disparità nelle risposte degli ascoltatori: qualcuno sente questo insieme di suoni salire, altri scendere e ci sono discordanze anche su quale dei due toni sia quello più alto e quale quello più basso. Per esempio alcuni sentono il modello cosistuito dai due toni Do#-Sol come un modello ascendente e il modello Sol-Do# come discendente, e dunque sentono il Sol come il suono con un'altezza più alta, e il Do# come quello con il tono più basso. Viceversa altre persone sentono Do#-Sol come un modello discendente e Sol-Do# come discendente, e di conseguenza essi sentiranno il Sol come il suono con altezza più bassa e Do# come quello più basso.

La psicologa Diana Deutsch, nel 1987, dimostrò che questo esperimento vale in larga misura su tutta la popolazione, e non è un fenomeno ristretto solo alle persone che si sono sottoposte all'esperimento. L'idea fu quella che la percezione del paradosso del tritone potrebbe essere correlata all'elaborazione del suono vocale, o meglio, si suppose che gli ascoltatori sviluppino una rappresentazione a lungo termine della gamma di tonalità della propria voce, e insieme ad essa creino una limitazione della "banda di ottave" nella quale recepiscono il maggior numero di valori delle altezze dei suoni. Si suppose inoltre che le classi di altezza che delimitano questa banda di ottava per quanto riguarda i suoni prodotti durante un normale discorso definiscano la posizione più alta del cerchio delle classi delle altezze. Per dimostrare questa ipotesi Diana Deutsch eseguì il seguente esperimento: selezionò delle persone, e registrò per ciascuno di loro 15 minuti di una loro conversazione spontanea e da questo selezionò la banda di ottava corrispondente. Confrontando i risultati ottenuti, si osservò che c'era effettivamente una forte corrispondenza tra le classi di altezza che delimitano la banda di ottava e quelle che definiscono la posizione più alta nel cerchio delle altezze. Questo supporta l'idea che la percezione del paradosso del tritone sia basata sulla rappresentazione del cerchio delle altezze, la cui orientazione (in base alla quale cambia il modo di sentire un determinato modello) è correlata al range delle altezze del suono della voce dell'ascoltatore. La Deutsch dimostrò che questo range di altezze, che ogni individuo crea, è determinato dall'esposizione ai discorsi degli altri. Dunque, per la capacità di determinare le altezze dei suoni si dà molta importanza ai discorsi fatti dalle persone che circondano un individuo, e quindi anche alla lingua parlata da queste persone. Possiamo adesso descrivere l'esperimento. Le persone sottoposte a tale esperimento, tutte senza problemi di udito, sono state scelte sulla base del numero di errori, non più di 6 su un massimo di 48, da esse compiuti durante un precedente esperimento nel quale dovevano dire quando una coppia di toni distanti metà di un'ottava erano ascendenti e quando discendenti. Il primo gruppo era fatto da 24 persone, tutte cresciute in California e che avevano passato gli ultimi anni in California. Il secondo gruppo era invece formato da 12 persone cresciute nel sud dell'Inghilterra, ma la maggior parte di essi al momento dell'esperimento viveva in California. Nessuno del primo gruppo aveva parenti cresciuti in Inghilterra e viceversa.

I toni costituenti l'esperimento erano fatti da sei onde sinusoidali a distanza di un'ottava e le cui ampiezze erano determinate da un involuppo spettrale a forma di campana. L'equazione generale che descrive un involuppo di questi tipo è:

$$A(f) = 0.5 - 0.05 \cos \left[\frac{2\pi}{\gamma} \log_{\beta} \left(\frac{f}{f_{min}} \right) \right] \quad f_{min} \leq f \leq \beta^{\gamma} f_{min},$$

dove $A(f)$ è l'ampiezza relativa a un'onda sinusoidale data di frequenza f Hz, β è il

rapporto tra la frequenza di una sinusoidale e la frequenza di una sinusoidale ad essa adiacente, γ è il numero di β cicli compiuti. La frequenza minima per ottenere un'ampiezza diversa da zero è f_{min} , mentre la frequenza massima è $\gamma\beta$ cicli sopra f_{min} . Nell'esperimento si ha $\beta = 2$ e $\gamma = 6$, e dunque l'involuppo spettrale corrispondente copre esattamente sei ottave, che vanno da f_{min} a $2^5 f_{min} = 32f_{min}$.

Per essere sicuri di poter controllare gli effetti delle ampiezza o della rumorosità delle onde sinusoidali, la coppia di toni è stata creata sotto diversi involuppi spettrali che sono stati posizionati in quattro regioni distinte lungo lo spettro; precisamente questi quattro involuppi sono stati centrati in: 262 Hz (Do_4), 370 Hz ($Fa\#_4$), 523 Hz (Do_5) e 740 Hz ($Fa\#_5$), e quindi sono posizionati a distanza di mezza ottava l'uno dall'altro. Possiamo inoltre osservare che le ampiezze relative delle componenti sinusoidali dei toni generati dagli involuppi centrati in Do_4 e Do_5 , considerati in una qualsiasi classe di altezza, sono identici a quelli generati dagli involuppi centrati in $Fa\#_4$ e $Fa\#_5$, considerati nella classe di altezza mezza ottava sopra rispetto alla precedente. Per esempio, le componenti del tono $Re-Sol\#$, generati dagli involuppi centrati in Do_4 e Do_5 , sono identiche a quelle del tono $Sol\#-Re$ generati dagli involuppi centrati invece in $Fa\#_4$ e $Fa\#_5$. Dodici coppie di toni sono state generate sotto ognuno dei quattro involuppi, corrispondenti alle coppie di altezze $Do-Fa\#$, $Do\#-Sol$, $Re-Sol\#$, $Re\#-La$, $Mi-La\#$, $Fa-Si$, $Fa\#-Do$, $Sol-Do\#$, $Sol\#-Re$, $La-Re\#$, $La\#-Mi$ e $Si-Fa$. Quindi in tutto ci sono 48 toni, ed ognuno di questi ha durata pari a 500 msec, senza spazi tra due toni costituenti la stessa coppia. Tutti i toni hanno la stessa ampiezza. Essi sono presentati in 12 blocchi, ed ogni blocco è formato da toni generati sotto uno dei quattro involuppi e contenenti una delle dodici coppie dell'altezza appena elencate. All'interno di questi blocchi, i toni sono presentati in un ordine qualsiasi, con la sola condizione che la stessa coppia di altezze non può comparire in due toni consecutivi. In questo modo, 16 blocchi vengono creati tutti assieme.

Ogni tono viene presentato agli ascoltatori, che devono capire se il modello sale o scende. All'interno dei blocchi ogni tono è suonato separatamente a distanza di 5 secondi e c'è un minuto di pausa tra ogni blocco. Inoltre ci sono 5 minuti di pausa tra l'ottavo e il nono blocco. Vediamo i risultati: si fa ascoltare un modello discendente, che è funzione delle altezze della classe dell'altezza del primo tono della coppia. Si prendono sei persone, tre nel primo gruppo, quindi californiani, tre nel secondo, quindi inglesi e si rappresenta graficamente la classe dell'altezza del primo tono della coppia. Come si vede dalla figura, anche se in modo diverso, gli inglesi sembrano ricevere il suono in maniera diversa tra loro, ma come si vede, l'andamento della curva è molto simile. Anche dal grafico dei tre californiani possiamo arrivare alla stessa conclusione, ma confrontando tra di loro questi due gruppi di grafici si vede a colpo d'occhio una netta differenza, anzi sembrano proprio uno l'opposto dell'altro (intuitivamente, si può dire che molti dei minimi locali presenti nei grafici in alto corrispondono a massimi locali nel corrispondente grafico in basso).

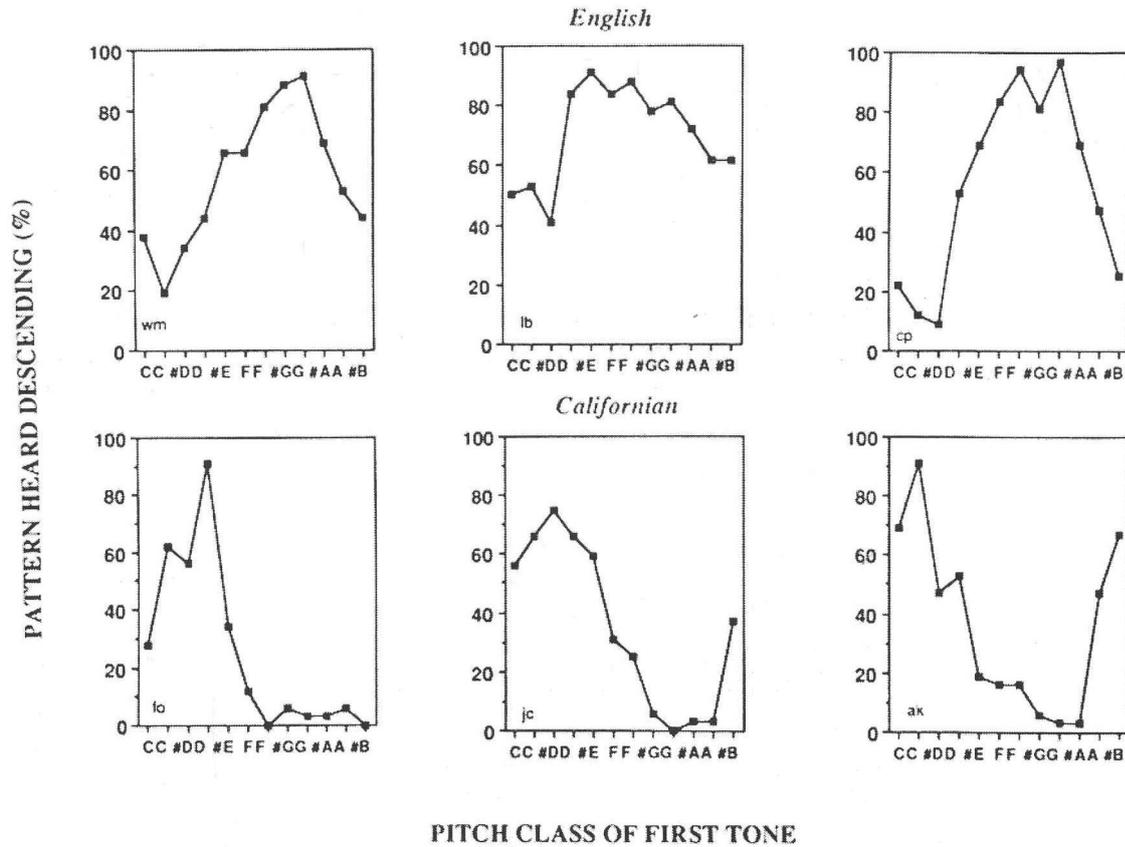


Fig. 3. Percentages of judgments that a tone pair formed a descending pattern, plotted as a function of the pitch class of the first tone of the pair. The three upper graphs show the results from English subjects, and the three lower graphs show the results from Californian subjects.

Vogliamo adesso far vedere che in tutto ciò gioca un ruolo fondamentale la posizione del tono lungo il cerchio delle altezze. Per far ciò il cerchio delle altezze è stato diviso a metà, e sono stati valutati nuovamente i risultati ottenuti. Inoltre il cerchio è stato orientato in modo che la classe più a sinistra della metà superiore del cerchio prenda la posizione centrale nel cerchio, e tutte le altre classi si posizionano conseguentemente a ciò, seguendo il verso orario.

Dai grafici disegnati sopra possiamo rappresentare il cerchio delle altezze, osservando che per i californiani il “picco” del cerchio sarà costituito dalla coppia Do-Do0#, mentre per gli inglesi sarà Fa#-Sol.

Adesso generalizziamo questo risultato, cercando di capire quali sono i toni, nel cerchio delle altezze, che i due gruppi sentono come centrali.

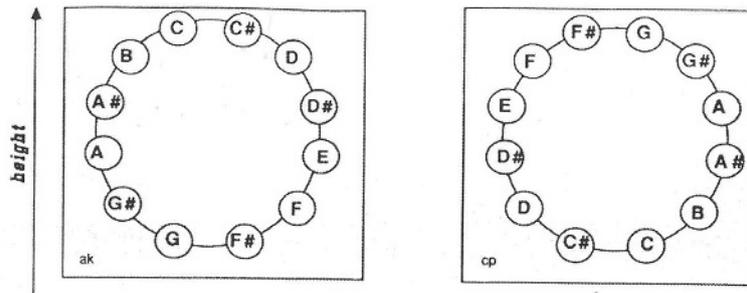


Fig. 4. Orientations of the pitch-class circle with respect to height, derived from the judgments of subject AK (from California) and subject CP (from England), whose data are shown in Figure 3. For subject AK the peak pitch classes were C and C#, and for subject CP the peak pitch classes were F# and G. It can be seen that the two subjects displayed opposite orientations of the pitch-class circle with respect to height.

Come si vede dal grafico, per gli inglesi i toni che risultano più spesso sono Fa#, Sol e Sol#, mentre per l'altro gruppo sono Si, Do, Do#, Re e Re#. Per confrontare i risultati, sono stati presi da ognuno dei due gruppi solo le persone che sentivano il "picco" nella metà superiore del cerchio, e si scoprì che ben 22 delle 24 persone del primo gruppo rientravano in questa categoria, mentre il numero degli inglesi che vi rientravano era di solo 3 su 12. Per concludere Diana Deutsch volle dimostrare che questo esperimento è caratterizzato solo ed esclusivamente dal background culturale dei gruppi che si sottopongono ad esso, e non è minimamente influenzato da fattori esterni, come l'abilità in musica o l'età. Per far ciò divise i due gruppi in due sottogruppi, uno con persone esperte in musica, l'altro no, e ripetendo esattamente lo stesso esperimento dimostrò che i risultati finali non cambiano. Provò anche a dividere i due gruppi in due sottogruppi, quelli con più di 22 anni e quelli con meno di 22 anni. Anche qui nessuna differenza sostanziale nei risultati. Infine, provò a dividere donne e uomini, ma anche qui non riscontrò nessuna differenza.

Bibliografia

- [1] P. Acquistapace, *Appunti di Analisi Funzionale*, 16/02/2011, www.dm.unipi.it/~acquistp/mate.html .
- [2] P. Acquistapace, *Appunti di Analisi matematica 2*, 3/03/2011, www.dm.unipi.it/~acquistp/mate.html .
- [3] Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, volume 1, Pergman Press, 1964.
- [4] D. Benson, *Music: a Mathematical Offering*, 2008, www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/ .
- [5] D. Deutsch, *Musical Illusion*, Scientific American 233 (1975), 92-94.
- [6] D. Deutsch, *The Tritone Paradoxes: An Influence of Language on Music Perception*, Music Percept. 1991, 8, 335-347.
- [7] T. W. Korner , *Fourier Analysis in Science and communication*, Cambridge University Press, 1988.
- [8] R. Plomp, G. F. Smoorenburg, *Frequency Analysis and Periodicity Detection in Hearing*, Leiden:Sijthoff, 1971.
- [9] J.-C. Risset, *Paradoxical sounds*, in Mathews and Pierce [87], pages 149-154.
- [10] M. R. Schroeder, *Auditory paradox based on fractal waveform*, J. Acoust. Soc. Amer. 79 (1) (1986), 186-189.
- [11] M. R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communication. With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing and Self-Similarity* (Springer, New York), terza ed.(1987), Chap. 30.
- [12] A. N. Tichonov , A. A. Samarskij ,*Equazioni della fisica matematica*, Edizioni Mir, 1981.