

# ESERCIZI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA (II MOD.)

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE AMBIENTALI

## gruppo 1 — esercizi di geometria

**Esercizio 1.** Se  $A = (1, 3, 6)$ ,  $B = (4, -3, 3)$ ,  $C = (2, 1, 5)$  sono tre vettori in  $\mathbb{R}^3$ , determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori:

(a)  $A + B$     (b)  $A - B$     (c)  $A + B - C$     (d)  $3A - 2B + 4C$

**Esercizio 2.** Siano assegnati i vettori  $A = (2, 1)$  e  $B = (1, 3)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Provare che ogni vettore  $C = (c_1, c_2)$  di  $\mathbb{R}^2$  può essere espresso nella forma  $C = xA + yB$ . Si esprimano  $x$  e  $y$  in termini di  $c_1$  e  $c_2$ .

**Esercizio 3.** Siano assegnati i vettori  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (0, 1, 1)$ ,  $C = (1, 1, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $D = xA + yB + zC$ , dove  $x, y, z$  sono tre numeri reali.

- (a) Determinare le componenti di  $D$ .  
(b) Dimostrare che la relazione  $D = O$  implica  $x = y = z = 0$ .  
(c) Determinare  $x, y, z$  in modo tale che risulti  $D = (1, 2, 3)$ .

**Esercizio 4.** Siano  $A = (1, 2, 3, 4)$ ,  $B = (-1, -2, -3, 0)$ ,  $C = (0, 1, 0, 1)$  tre vettori in  $\mathbb{R}^4$ . Calcolare ciascuno dei seguenti prodotti scalari:

(a)  $\langle A, B \rangle$     (b)  $\langle B, C \rangle$     (c)  $\langle A, C \rangle$     (d)  $\langle A, B + C \rangle$     (e)  $\langle A - B, C \rangle$

**Esercizio 5.** Se  $A = (2, 1, -1)$  e  $B = (3, 1, 2)$  sono due vettori in  $\mathbb{R}^3$ , determinare due numeri reali  $x, y$  in modo tale che il vettore  $C = xA + yB$  sia diverso da  $O$  e risulti  $\langle C, B \rangle = 0$ .

**Esercizio 6.** Siano  $A = (2, -1, 2)$ ,  $B = (1, 2, -2)$ ,  $C = (1, -1, 1)$  tre vettori in  $\mathbb{R}^3$ . Calcolare il modulo di ciascuno dei seguenti vettori:

(a)  $A + B$     (b)  $A - B$     (c)  $A + B - C$     (d)  $A - B + C$

**Esercizio 7.** Scrivere l'equazione della retta parallela al vettore  $\mathbf{v}$  e passante per il punto  $P$ :

(a)  $\mathbf{v} = (1, 1)$      $P = (1, 0)$     (b)  $\mathbf{v} = (2, 3)$      $P = (-1, 3)$   
(c)  $\mathbf{v} = (2, -2)$      $P = (1, 1)$     (d)  $\mathbf{v} = (1, 0)$      $P = (3, 3)$   
(e)  $\mathbf{v} = (0, 2)$      $P = (2, 1)$     (f)  $\mathbf{v} = (1, 2)$      $P = (0, -1)$

**Esercizio 8.** Una retta  $L$  in  $\mathbb{R}^3$  passa per il punto  $P = (-3, 1, 1)$  ed è parallela al vettore  $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$ . Determinare quali tra i punti seguenti appartengono a  $L$ :

- (a)  $(0, 0, 0)$       (b)  $(2, -1, 4)$       (c)  $(-2, -1, 4)$       (d)  $(-4, 3, -2)$

**Esercizio 9.** Una retta  $L$  in  $\mathbb{R}^3$  passa per i punti  $P = (-3, 1, 1)$  e  $Q = (1, 2, 7)$ . Determinare quali dei punti seguenti appartengono a  $L$ :

- (a)  $(-7, 0, 5)$       (b)  $(-7, 0, -5)$       (c)  $(-11, 1, 11)$       (d)  $(-11, 1, -11)$   
(e)  $(-2, 3, 8)$       (f)  $(-5, 4, 9)$       (g)  $(-2, 3, -8)$       (h)  $(5, -4, 9)$

**Esercizio 10.** In ciascuno dei casi seguenti, decidere se i punti  $P, Q, R$  sono allineati:

- (a)  $P = (2, 1, 1)$      $Q = (4, 1, -1)$      $R = (3, -1, 1)$   
(b)  $P = (2, 2, 3)$      $Q = (-2, 3, 1)$      $R = (-6, 4, 1)$   
(c)  $P = (2, 1, 1)$      $Q = (-2, 3, 1)$      $R = (5, -1, 1)$

**Esercizio 11.** Calcolare la distanza tra il punto  $P$  e la retta di equazione data:

- (a)  $P = (3, 2), \quad x - 2y - 2 = 0$       (b)  $P = (0, 1), \quad x + y = 0$   
(c)  $P = (-1, 2), \quad 2x - y + 3 = 0$       (d)  $P = (1, 1), \quad x + 2y - 4 = 0$

**Esercizio 12.** Determinare l'ampiezza dell'angolo compreso tra i vettori  $P$  e  $Q$  assegnati e calcolare l'area del triangolo  $POQ$  formato dai vettori  $P$  e  $Q$ .

- (a)  $P = (1, 2), Q = (2, -1)$       (b)  $P = (1, 1), Q = (1, 0)$   
(c)  $P = (\sqrt{3}, 1), Q = (0, 1)$       (d)  $P = (1, \sqrt{3}), Q = (\sqrt{3}, 1)$   
(e)  $P = (1, 0), Q = (-\sqrt{3}, 1)$       (f)  $P = (1, 3), Q = (-2, -6)$

**Esercizio 13.** Dato il piano  $M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ , con  $P = (1, 2, -3)$ ,  $A = (3, 2, 1)$  e  $B = (1, 0, 4)$ . Stabilire quali dei seguenti punti appartengono a  $M$ :

- (a)  $(1, 2, 0)$       (b)  $(8, 0, -1)$       (c)  $(-3, 1, -3)$       (d)  $(3, 1, 3)$

**Esercizio 14.** Scrivere l'equazione del piano perpendicolare al vettore  $\mathbf{g}$  e passante per il punto  $P$ :

- (a)  $\mathbf{g} = (1, 2, 1)$      $P = (0, 1, 0)$       (b)  $\mathbf{g} = (2, 1, 3)$      $P = (1, 0, 2)$   
(c)  $\mathbf{g} = (1, 1, 0)$      $P = (-1, 2, 1)$       (d)  $\mathbf{g} = (0, -1, 1)$      $P = (1, 3, 2)$   
(e)  $\mathbf{g} = (1, 3, -2)$      $P = (5, -1, 2)$       (f)  $\mathbf{g} = (-1, 1, -2)$      $P = (0, 0, 1)$