

Università degli studi di Pisa
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

**Dinamiche caotiche nel modello
«preda-predatore» di Volterra-Lotka**

Candidato: Alberto Giuseppe Brudaglio

Relatore: Prof. Paolo Acquistapace

Anno Accademico 2008-2009

Introduzione

Lo sviluppo della dinamica delle popolazioni si deve principalmente a due importanti scienziati del primo novecento: Alfred J. Lotka, esperto di statistica americano, e Vito Volterra, matematico italiano. Lotka vedeva la natura come un grande sistema di «trasformatori di energia» e racchiuse questa sua visione in un volume del 1925 intitolato "Elements of Physical Biology". Tra le altre riflessioni il volume presentava un modello matematico riguardante l'interazione di due specie animali delle quali una fosse parassita dell'altra. Il modello di Lotka si ispirava ad un altro suo modello riguardante una certa reazione chimica. Nello stesso periodo Volterra, su richiesta dello zoologo Umberto D'Ancona, intervenne con alcune considerazioni nello studio di uno strano fenomeno che aveva interessato due specie di pesci nell'alto Adriatico durante la Prima Guerra Mondiale. Il risultato fu la formulazione di un modello identico a quello di Lotka che infatti oggi viene indicato con il nome di "Equazioni di Volterra-Lotka". Il modello prevedeva una crescita delle popolazioni secondo la legge di Verhulst (logistica) influenzata dalla «teoria degli incontri», ovvero dall'ipotesi che l'effetto della predazione fosse proporzionale al numero di incontri tra esemplari delle due specie. Il modello originale è stato raffinato e arricchito dallo stesso Volterra e da altri studiosi permettendo di descrivere l'interazione tra più di due specie in condizioni non ideali. Il modello si configura in una coppia di equazioni differenziali ordinarie. Esse descrivono un sistema dinamico non lineare avente come spazio delle fasi il primo quadrante del piano cartesiano. Questo sistema mostra molte delle particolarità tipiche dei modelli non lineari riguardo l'integrabilità e il comportamento in caso di perturbazioni dei coefficienti. I coefficienti, indicati con le lettere A, B, C, D , sono inizialmente supposti costanti; tuttavia si può alterare il modello assumendo che i coefficienti siano funzioni particolari del tempo dotate, ad esempio, di proprietà di periodicità o integrabilità. In questa forma più generale il sistema risultante ci permette di mostrare la natura caotica della dinamica che, per quanto nascosta, era già presente nel modello più semplice. Emergono in modo naturale elementi tipici della teoria dei sistemi caotici come certi insiemi invarianti ed iperbolici per particolari mappe

discrete, costruite a partire dal sistema stesso. Le argomentazioni della tesi ricalcano quelle dell'articolo "Chaotic dynamics in the Volterra predator-prey model via linked twist maps" (Opuscula Mathematica, Vol. 28, No. 4, 2008) di Marina Pireddu e Fabio Zanolin. La lettura dell'articolo ha rivelato l'assenza di sufficienti riferimenti o di una ragionevole dimostrazione circa un lemma chiave per le argomentazioni dell'articolo stesso (Lemma 3.1). In questa tesi si tenta di colmare questa lacuna descrivendo i passaggi mancanti per la giustificazione dei risultati e gli strumenti teorici utilizzati; si danno abbondanti riferimenti ad altri articoli per quanto riguarda le sfumature e le osservazioni che sottendono l'applicazione di tali strumenti alla nostra costruzione. In questo elaborato sono riassunti dapprima gli elementi di base dell'analisi qualitativa dei sistemi dinamici e i concetti elementari nell'uso della dinamica simbolica per la ricerca di strutture caotiche. In seguito sono analizzati tre strumenti fondamentali nello studio dei sistemi non lineari:

1. una costruzione che definisce un insieme invariante e iperbolico per un diffeomorfismo di \mathbb{R}^2 o \mathbb{T}^2 nell'intorno di un suo punto fisso iperbolico; si tratta di un risultato enunciato da Stephen Smale nel 1967 nell'articolo "Differentiable Dynamical Systems";
2. la mappa di Poincaré, di cui viene data una definizione generale ed una più specializzata all'analisi di cui ci occupiamo;
3. le Linked Twist Map, strumenti molto usati recentemente nell'analisi di vari modelli, ad esempio riguardanti il moto di particelle in un campo magnetico o l'evoluzione di reazioni chimiche.

L'elaborato successivamente descrive il modello originale, ripercorrendo la costruzione di Volterra e citando le sue basi teoriche (dovute a Verhulst). Infine si ricostruisce la tesi di Pireddu e Zanolin tentando di desumere alcune conclusioni interessanti: da un punto di vista teorico si mostra che la ricchezza delle dinamiche descritte dal modello rende quest'ultimo molto più versatile di quanto possa sembrare in prima istanza; da un punto di vista pratico si tenta di giustificare, sulla base del modello, perché sia importante che ogni intervento sia ben ponderato quando si tenta di condizionare artificialmente un sistema naturale.

Indice

1	Risultati preliminari	1
1.1	Sistemi dinamici continui	1
1.2	Analisi della stabilità	2
1.3	Sistemi dinamici discreti	8
1.3.1	Discretizzazione	9
1.4	La mappa di Poincaré	9
2	Sistemi simbolici e caos	11
2.1	Dinamica simbolica	11
2.2	Il ferro di cavallo	16
2.3	Dinamica caotica	26
2.4	Linked twist maps	29
3	Dinamiche di specie	35
3.1	Un po' di storia	35
3.2	Una specie	36
3.2.1	Modello banale: Crescita illimitata	36
3.2.2	Modello meno banale: fenomeni sociali e crescita limitata	37
3.3	Prede e predatori	38
3.3.1	Le equazioni di Volterra-Lotka	40
3.3.2	Analisi della stabilità e ritratto in fase	42
3.4	Alternanza stagionale	43
4	Conclusioni	55
	Bibliografia	57

Elenco delle figure

2.1	Esempio di rappresentazione simbolica	12
2.2	Deformazione a ferro di cavallo	18
2.3	Costruzione della mappa a ferro di cavallo	19
2.4	Orientazione di un rettangolo	27
2.5	La proprietà di deformazione lungo i cammini.	28
2.6	Twist map	30
2.7	Linked twist maps	31
2.8	Individuazione della regione R in Q	32
3.1	Orientazione del campo del sistema di Volterra-Lotka	40
3.2	Alcune orbite del sistema di Volterra-Lotka standard e perturbato.	45

Capitolo 1

Risultati preliminari

In questa sezione introduciamo la teoria elementare dei sistemi dinamici, le definizioni ed i risultati principali che serviranno nelle argomentazioni di questa tesi.

1.1 Sistemi dinamici continui

Definizione 1. *Un sistema dinamico continuo in un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è un'equazione differenziale ordinaria autonoma*

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = F(X)$$

ove F è un campo vettoriale definito su W a valori in \mathbb{R}^n di classe C^1 .
Le soluzioni possono essere definite solo in un sottoinsieme di \mathbb{R} . Se l'insieme di definizione di una soluzione è tutto \mathbb{R} , chiamiamo orbita la traiettoria descritta da tale soluzione.

Osservazione 2. *Un sistema non autonomo:*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

può essere trasformato nel sistema autonomo di dimensione superiore ma equivalente:

$$\begin{cases} \dot{Y} = G(Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ X_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

dove

$$Y = \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}$$

$$G(Y) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(Y) \end{pmatrix}$$

Definizione 3. Dato un sistema dinamico continuo

$$\dot{X} = F(X)$$

in un aperto W , si chiama punto di equilibrio un punto $S \in W$ tale che $F(S) = 0$.

Osservazione 4. Un punto di equilibrio è la traiettoria di una soluzione costante, dunque un'orbita.

Teorema 5. Se una certa soluzione $X(t)$ di un sistema dinamico continuo ha limite per $t \rightarrow +\infty$ e questo limite è il punto $P \in W$ allora P è un punto di equilibrio del sistema. Analogamente per i limiti a $-\infty$.

Dimostrazione. Sia $Y(t)$ la soluzione con condizione iniziale P . Per il teorema di esistenza ed unicità essa esiste unica ed è definita almeno in un intervallo di lunghezza $T > 0$ abbastanza piccolo. Il flusso integrale Φ^t , ossia la famiglia di applicazioni, parametrizzata dalla variabile t , che ad ogni punto Q di W associa il valore della soluzione di condizione iniziale Q al tempo t , dipende con continuità da Q ; dunque:

$$\Phi^T(P) = \Phi^T\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t+T) = P.$$

Questo significa che il punto P è l'immagine di una soluzione costante ovvero è un punto di equilibrio. \square

D'ora in avanti, salvo indicazioni contrarie, parleremo di sistema dinamico continuo sottointendendo le notazioni fin qui usate come quella dell'aperto W su cui il sistema è definito o del campo F supposto di classe C^1 .

1.2 Analisi della stabilità

Definizione 6. Un punto $P \in W$ si dice attrattivo se esiste un intorno U di P (contenuto in W) tale che per ogni condizione iniziale $X_0 \in U$, la soluzione $X(t)$ ad essa corrispondente converge a P per $t \rightarrow +\infty$.

Osservazione 7. Per il teorema 5 un punto attrattivo è un punto di equilibrio.

Definizione 8. *Un punto $P \in W$ si dice stabile se per ogni intorno U di P esiste un intorno V di P tale che per ogni condizione iniziale in V la corrispondente soluzione è contenuta in U per ogni $t \geq 0$. Si intende che $U, V \subseteq W$.*

Osservazione 9. *Un punto stabile deve essere necessariamente un punto di equilibrio. Ragioniamo per assurdo: se $P \in W$ rispettasse la definizione di stabilità ma non fosse un punto di equilibrio allora la soluzione con condizione iniziale P non sarebbe costante ovvero esisterebbe un certo $S \neq P$, $S = \Phi^T(P)$. Dunque esisterebbe un intorno U di P non contenente S . Allora qualunque intorno V di P conterrebbe ovviamente P ma la soluzione con condizione iniziale P non potrebbe stare in U per ogni $t \geq 0$ perché per $t = T$ essa dovrebbe passare per S che non appartiene ad U .*

Definizione 10. *Un punto stabile e attrattivo per un sistema dinamico si dice asintoticamente stabile.*

I concetti di stabilità e stabilità asintotica non coincidono, ovvero si possono trovare degli esempi di punti stabili ma non attrattivi e attrattivi ma non stabili.

Definizione 11. *Dato un qualunque punto di equilibrio P per un sistema dinamico continuo, si dice bacino di attrazione (o semplicemente bacino) di P l'insieme $Bac(P)$ delle condizioni iniziali che danno luogo a soluzioni convergenti a P .*

Lo studio delle caratteristiche di stabilità di un dato punto di equilibrio non prevedono metodi del tutto esaustivi. Lo studio di un particolare sistema lineare, detto «linearizzato», permette di esprimere condizioni sufficienti per la stabilità di un punto di equilibrio.

Definizione 12. *Sia $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinamico continuo con il punto di equilibrio P . Dall'ipotesi di regolarità della mappa F segue che:*

$$\dot{X} = F(X) = DF(P)(X - P) + G(X)$$

ove DF è la matrice jacobiana di F e dunque G è un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a $(X - P)$. Il sistema dinamico lineare

$$\dot{Y} = DF(P)Y, \quad Y = X - P$$

si dice linearizzato del sistema originale in P . Chiamiamo esponenti di Lyapunov del sistema in P le parti reali degli autovalori della matrice $DF(P)$.

Definizione 13. *Se tutti gli esponenti di Lyapounov in P sono negativi, P si dice pozzo, se gli esponenti di Lyapounov sono positivi, P si dice sorgente.*

Teorema 14. *Data la matrice A a coefficienti reali le seguenti sono equivalenti:*

- a. *L'origine è un pozzo per il sistema dinamico lineare $\dot{X} = AX$.*
- b. *Esistono due costanti α, β positive tali che per ogni condizione iniziale X_0 e per ogni t positivo*

$$|\exp(tA)X_0| \leq \alpha e^{-t\beta}|X_0|.$$

Allo stesso modo le seguenti sono equivalenti:

- c. *L'origine è una sorgente per il sistema dinamico lineare $\dot{X} = AX$.*
- d. *Esistono due costanti α, β positive tali che per ogni condizione iniziale X_0 e per ogni t positivo*

$$|\exp(tA)X_0| \geq \alpha e^{t\beta}|X_0|.$$

Dimostrazione. Dalla teoria elementare delle equazioni differenziali sappiamo che le soluzioni del sistema dinamico lineare sono tutte esprimibili come combinazioni lineari di funzioni del tipo: $e^{Lt}Z(t)$ ove L è un esponente di Lyapounov e $Z(t)$ è una funzione che per $t \rightarrow +\infty$ cresce più lentamente di ogni esponenziale. Se β è una costante positiva tale che ogni esponente di Lyapounov è minore di $-\beta$ allora ogni componente della soluzione tende a zero più rapidamente di $e^{-\beta t}$. Viceversa, per assurdo, se esiste anche un solo esponente di Lyapounov L non negativo, allora la funzione $e^{Lt}Z(t)$ non tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$ e quindi qualche componente della soluzione non tende a 0.

L'equivalenza tra i punti c e d si prova in modo analogo studiando il comportamento per t negativo ed i limiti per $t \rightarrow -\infty$. Scambiando infatti t con $-t$ il sistema dinamico $\dot{X} = AX$ diventa $\dot{X} = -AX$ e gli autovalori di $-A$ sono gli opposti degli autovalori A . \square

Il comportamento di pozzi e sorgenti nel caso lineare si estende al caso non lineare. Per questo è necessario un risultato di cui non diamo la dimostrazione.

Lemma 15. *Sia A una matrice a coefficienti reali, α, β due numeri reali tali che per ogni autovalore λ di A*

$$\alpha < \operatorname{Re}(\lambda) < \beta.$$

Allora esiste una base $V = \{V_1, \dots, V_n\}$ di \mathbb{R}^n e un corrispondente prodotto scalare

$$(X, Y)_V = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

dove x_i, y_i sono le coordinate di X e Y rispetto a V , per cui vale la disuguaglianza

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad \alpha(Y, Y)_V \leq (AY, Y)_V \leq \beta(Y, Y)_V,$$

ovvero, passando alla norma indotta dal prodotto scalare,

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad \alpha \|Y\|_V^2 \leq (AY, Y)_V \leq \beta \|Y\|_V^2.$$

Teorema 16. Sia P un pozzo per il sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$ e sia $A = DF(P)$ la matrice del sistema linearizzato in P . Se c è un numero reale positivo tale che per ogni esponente di Lyapounov L di A vale $L < -c$ allora esiste un intorno $U \subseteq W$ di P tale che:

1. Il flusso integrale $\Phi^t(X)$ è definito per ogni $X \in U$ e per ogni $t > 0$;
2. Esiste una costante $B > 0$ tale che per ogni $X \in U$ e per ogni $t \geq 0$:

$$|\Phi^t(X) - P| \leq B e^{-ct} |X - P|.$$

Perciò in presenza di un pozzo il comportamento asintotico locale delle soluzioni è simile al caso lineare: tutte le soluzioni arbitrariamente vicine convergono al pozzo che è dunque asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Innanzitutto operiamo un cambio di coordinate mediante una traslazione $X \mapsto X - P$.

Certamente esiste un numero reale positivo b tale che, per ogni esponente di Lyapounov L del sistema linearizzato in 0 , valga $L < -b < -c$. Per il lemma 15 esiste una certa base V di \mathbb{R}^n e un prodotto scalare associato a tale base per i quali:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad (AX, X)_V \leq -b \|X\|_V^2.$$

Per definizione di differenziabilità, ricordando che A è la matrice jacobiana di F in 0 , e per l'equivalenza di qualunque coppia di norme in \mathbb{R}^n si ha che:

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\|F(X) - AX\|_V}{\|X\|_V} = 0$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy segue che:

$$(F(X) - AX, X)_V \leq \|F(X) - AX\|_V \|X\|_V$$

e dividendo per $\|X\|_V^2$ e passando al limite:

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{(F(X) - AX, X)_V}{\|X\|_V^2} = 0.$$

Scelto un intorno U di 0 abbastanza piccolo esiste un ϵ piccolo tale che in U :

$$(F(X), X)_V = (F(X) - AX, X)_V + (AX, X)_V \leq (\epsilon - b)\|X\|_V^2.$$

In conclusione, definitivamente per $X \rightarrow 0$:

$$(F(X), X)_V \leq -c\|X\|_V^2.$$

Sia ora $X(t)$ una soluzione con condizione iniziale $X(0) \in U$. U è aperto e dunque esiste un tempo $t_1 > 0$ tale che per $0 \leq t \leq t_1$ la soluzione $X(t)$ è definita e contenuta in U . In tale intervallo, detta $n(t) = \|X(t)\|_V$, si ha:

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{(X, X)_V} = \frac{(\dot{X}, X)_V}{n(t)} = \frac{(F(X), X)_V}{n(t)} \leq -cn(t)$$

e integrando:

$$\frac{d}{dt}n(t) \frac{1}{n(t)} \leq -c \Rightarrow \log n(t) \leq -ct + \text{costante} \Rightarrow n(t) \leq n(0)e^{-ct}.$$

Applicando nuovamente l'equivalenza delle norme la precedente disuguaglianza si può esprimere nella norma euclidea facendo comparire una costante B positiva come nella tesi 2.

Scegliendo come intorno U una palla di centro 0 e raggio $\epsilon > 0$, per quanto detto, la soluzione è definita e resta in U per un certo intervallo di tempo $[0, t_1]$. La soluzione può essere continuata a partire da t_1 . La chiusura di U in W è un compatto e quindi la soluzione resta definita per ogni $t > 0$ in virtù del teorema di prolungamento delle soluzioni. \square

Osservazione 17. *Anche nel caso della sorgente il risultato lineare si estende al caso non lineare in modo del tutto analogo al teorema precedente.*

Se un particolare punto di equilibrio non è né di tipo pozzo né di tipo sorgente, in generale, non è possibile concludere sulla stabilità a partire dagli esponenti di Lapounov. Uno strumento più potente, che useremo nel capitolo 3.3, è dato dalle funzioni di Lyapounov.

Definizione 18. *Una funzione V definita e di classe C^1 in un intorno $U \subseteq W$ di un punto di equilibrio P si dice funzione di Lyapounov se verifica:*

1. $\forall X \in U \dot{V}(X) \leq 0$;
2. $V(S) = 0$ e $\forall X \in U, X \neq P, V(X) > 0$.

Esempio 19. *Se il punto di equilibrio P è un pozzo, dal teorema 16, segue che esiste una norma $\|X\|_E$, associata alla base E , tale che:*

$$\frac{d}{dt}\|X - P\|_E \leq -c\|X - P\|_E \leq 0$$

per ogni X in un intorno U di P e con c costante positiva. Dunque $V(X) = \|X - P\|_E$ è una funzione di Lyapounov.

Il metodo della funzione di Lyapounov consente di generalizzare l'esempio precedente. Le funzioni di Lyapounov che si possono costruire hanno lo stesso effetto della norma dell'esempio precedente in modo un po' deformato: «costringono» le soluzioni vicine all'equilibrio a restare vicine ad esso al crescere di t .

Teorema 20 (Stabilità di Lyapounov). *Se esiste una funzione di Lyapounov V per l'equilibrio P definita in un suo intorno U allora P è stabile.*

Dimostrazione. Consideriamo la palla aperta:

$$B_\delta = \{X : \|X - P\| < \delta\}$$

e la sua frontiera:

$$S_\delta = \partial B_\delta = \{X : \|X - P\| = \delta\}$$

scegliendo δ abbastanza piccolo perché sia $S_\delta \subseteq U$. S_δ è un compatto e dunque esiste il minimo $m > 0$ di $V(X)$ su S_δ . Definiamo

$$Q = \{X \in B_\delta : V(X) < m\}.$$

Q è un intorno di P , le soluzioni che partono da una condizione iniziale X in Q non possono mai attraversare S_δ , perché su di esse il valore iniziale di V è strettamente minore di m e la funzione di Lyapounov non può crescere lungo le soluzioni. La distanza da P lungo la soluzione è una funzione continua del tempo e quindi non può assumere valori maggiori di δ senza passare dal valore δ , ovvero una soluzione con condizione iniziale in Q , non potendo attraversare S_δ , deve rimanere in B_δ . Le palle B_δ sono un sistema fondamentale di intorni di P e dunque la condizione di stabilità è verificata. \square

1.3 Sistemi dinamici discreti

Definizione 21. *Un sistema dinamico discreto in $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di W in sé:*

$$f : W \rightarrow W,$$

cioè una funzione differenziabile con inversa differenziabile (di classe C^1 almeno). Un'orbita di un sistema dinamico discreto è una funzione $k \mapsto X_k$ della variabile discreta $k \in \mathbb{Z}$ a valori in W che soddisfa, per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

$$X_{k+1} = f(X_k)$$

Osservazione 22. *L'ipotesi di regolarità della funzione f nella definizione precedente potrebbe essere rilassata. Si possono definire sistemi dinamici a partire da qualunque mappa f . Scegliendo delle mappe almeno continue si assicura un comportamento abbastanza regolare per le semiorbite positive (ovvero quella parte di orbite con indici k positivi). Se la mappa f è anche invertibile possiamo parlare di semiorbite negative (la parte di orbite con indici k negativi) e se f^{-1} è anche invertibile, cioè se f è un omeomorfismo, anche le semiorbite negative saranno abbastanza regolari. La condizione di differenziabilità, invece, viene imposta soprattutto per poter approssimare la mappa f , nell'intorno di certi punti, con il suo differenziale. Come nel caso dei sistemi continui, questa tecnica è utile per l'analisi di stabilità, tuttavia non è indispensabile e spesso inefficace.*

Nei sistemi dinamici continui esistono particolari orbite costanti che coincidono con i punti di equilibrio. Analogamente, per i sistemi dinamici discreti possiamo definire i punti fissi.

Definizione 23. *Un punto fisso per un sistema dinamico discreto definito dalla mappa f è un punto X tale che $X = f(X)$. Dalla definizione di orbita di un sistema discreto segue che un punto fisso coincide con la traiettoria di un'orbita costante.*

Si può parlare di stabilità nel caso discreto, in modo analogo al caso continuo.

Definizione 24. *Un punto X_0 si dice stabile per la mappa f se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:*

$$|X - X_0| < \delta \Rightarrow |f^k(X) - f^k(X_0)| < \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

X_0 si dice asintoticamente stabile per f se è stabile ed inoltre esiste un intorno U di X_0 tale che

$$X \in U \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(X) - f^k(X_0)| = 0.$$

Definizione 25. *Sia ϕ un diffeomorfismo del piano \mathbb{R}^2 (o del toro \mathbb{T}^2). Consideriamo un suo punto fisso X e la matrice jacobiana A di ϕ nel punto X . Diciamo che X è iperbolico per la mappa ϕ se gli autovalori di A sono, in modulo, uno maggiore ed uno minore di 1.*

1.3.1 Discretizzazione

Un'operazione che si rivela utile frequentemente nello studio dei sistemi dinamici continui è la discretizzazione. Essa consiste nell'approssimare un dato sistema dinamico continuo con uno discreto che ne conservi alcune proprietà interessanti. Un modo semplice e intuitivo per operare una discretizzazione è quello di costruire una successione di tempi discreti ed una successione di stati ad essi corrispondenti. Ad esempio se fissiamo un passo costante h :

$$t_k = kh \quad , \quad X_k = X(t_k)$$

esprime la discretizzazione di un'orbita di un sistema dinamico continuo. Più in generale, detto Φ il flusso integrale del sistema dinamico continuo e fissato un certo passo h , la mappa Φ^h è un sistema dinamico discreto. Essa associa ad ogni stato nello spazio delle fasi lo stato del sistema dopo il tempo h lungo la stessa soluzione.

1.4 La mappa di Poincaré

Un metodo molto diffuso per discretizzare un sistema continuo è la cosiddetta *Mappa di Poincaré* o *Mappa di primo ritorno*. Nell'articolo [1], da cui nasce l'argomentazione principale di questa tesi, la Mappa di Poincaré è intesa come la discretizzazione descritta al paragrafo precedente per un opportuno tempo T . Per completezza, però, riportiamo la definizione più usata per questo genere di discretizzazione. Questa definizione e quella usata in [1] sono simili ma non del tutto equivalenti. Non ci occupiamo di analizzare differenze e analogie tra i due concetti.

Definizione 26. *Sia $\gamma(t)$ un'orbita di un sistema dinamico continuo. Sia $P = \gamma(0)$ un punto lungo quest'orbita e Σ una ipersuperficie nello spazio delle fasi che sia trasversale alla curva γ in P . Per continuità Σ deve restare trasversale alle soluzioni del sistema dinamico in un intorno $U \subseteq \Sigma$ di P . Una tale Σ è detta sezione di Poincaré. La condizione di trasversalità implica che per $t > 0$ e per $t < 0$ la curva γ debba lasciare Σ . Supponiamo che dopo un certo tempo Δt la curva γ torni ad intersecare Σ e che questo sia il «primo ritorno» ovvero che per $t \in (0, \Delta t)$ la curva γ non intersechi Σ .*

Supponiamo anche che questo secondo incontro sia trasversale. Per il teorema di continuità del flusso, tutte le soluzioni che hanno condizione iniziale X_0 in $\Sigma \cap U$ vicina a P devono intersecare nuovamente Σ in un certo punto $\mathcal{P}(X_0)$. Resta così definita una mappa:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : U &\rightarrow \Sigma \\ X_0 &\mapsto \mathcal{P}(X_0)\end{aligned}$$

che è un sistema dinamico discreto e si chiama mappa di Poincaré o mappa di primo ritorno.

Capitolo 2

Sistemi simbolici e caos

In questa sezione trattiamo un metodo molto utile per lo studio dei sistemi non lineari chiamato dinamica simbolica. Attraverso questo strumento presentiamo il risultato di Smale, noto come «ferro di cavallo» ed una sua generalizzazione. Infine introduciamo le linked twist maps.

2.1 Dinamica simbolica

La dinamica simbolica è uno strumento molto potente utilizzato per descrivere sistemi non lineari e, in particolare, per studiare il fenomeno del caos. Esso consiste nel dividere lo spazio delle fasi o un suo sottoinsieme in zone, a ciascuna delle quali viene associato un simbolo (in genere i numeri naturali). Si rappresenta l'evoluzione di un punto, la sua orbita, attraverso sequenze di simboli che indicano, per ogni tempo discreto, in quale zona si trova il punto.

Esempio 27. *Si consideri un sistema discreto il cui spazio delle fasi sia il quadrato unitario e la funzione che definisce l'evoluzione del sistema sia una certa mappa f (vedi figura 2.1). Dividiamo il piano delle fasi in due settori, come in figura, denotandoli con i simboli 0 e 1. A partire da un certo punto x costruiamo l'orbita e associamo al punto x una sequenza biinfinita di simboli scelti nell'insieme $\{0, 1\}$ in modo tale che il simbolo di indice j è uguale ad 0 se $f^j(x)$ sta nel settore 0 ed è uguale ad 1 se $f^j(x)$ sta nel settore 1. Possiamo in questo modo rappresentare l'evoluzione del punto x facendo uso di una sequenza che viene detta appunto itinerario o storia del punto x . L'evoluzione data dalla mappa f nell'ordinario spazio delle fasi viene rappresentata simbolicamente dall'operatore di scorrimento (di Bernoulli):*

$$\sigma : a_n \mapsto a_{n+1}$$

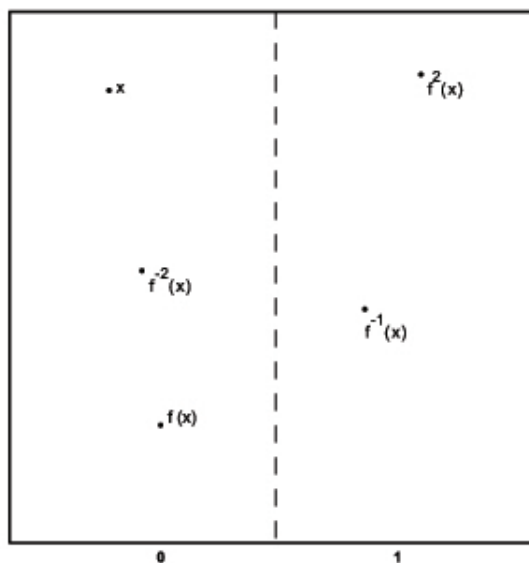


Figura 2.1: Esempio di dinamica simbolica a partire da un semplice sistema discreto. In figura si vede una porzione dell'orbita del punto x a cui corrisponde la sequenza $\dots 01.001\dots$

che associa ad ogni sequenza di simboli la sequenza che si ottiene spostando di una posizione verso destra tutti gli indici. L'operatore di scorrimento, dunque, associa alla storia di un punto la storia di un altro punto avente la stessa evoluzione «un istante prima». Ciò è esattamente analogo al comportamento della mappa f che può essere considerata una trasformazione dello spazio delle fasi, che associa all'insieme degli stati del sistema all'istante t l'analogo insieme degli stati all'istante successivo.

Osservazione 28. In particolari condizioni la rappresentazione di un sistema discreto con un sistema simbolico, attraverso la precedente costruzione, è molto fruttuoso. Questo giustifica la seguenti definizioni.

Definizione 29. Chiamiamo n -shift totale la coppia (X, σ) ove X è l'insieme di tutte le sequenze biinfinite di simboli appartenenti all'insieme $\{0, \dots, n-1\}$ o equivalentemente $\{1, \dots, n\}$ e σ è la funzione di scorrimento definita sopra. Più in generale chiamiamo \mathcal{A} -shift totale la coppia (X, σ) ove X è l'insieme di tutte le sequenze biinfinite di simboli appartenenti ad un certo insieme finito \mathcal{A} , detto alfabeto. Formalmente l' \mathcal{A} -shift totale è l'insieme

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

unitamente alla mappa

$$\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \quad (\sigma x)_i = x_{i+1}.$$

Una sottosequenza finita $\{x_n, \dots, x_m\}$ di una sequenza x viene detta parola o blocco e si indica $x_{[n,m]}$.

Definizione 30. *L' \mathcal{A} -shift totale può essere munito di una semplice topologia. Questa topologia è indotta da una metrica definibile come segue: due sequenze x, y si trovano a distanza minore di $n \in \mathbb{N}$ se esse coincidono per i $2n + 1$ elementi centrali ovvero se*

$$x_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}.$$

Osservazione 31. *La scelta della specifica metrica non influisce sui risultati che possiamo ottenere. Lievi modifiche e generalizzazioni o restrizioni permettono di trattare casi simili a quello presentato, ad esempio su spazi di sequenze infinite indicizzate dai numeri naturali. Questo è utile nel caso si voglia rappresentare simbolicamente sistemi dinamici ad un solo verso, ovvero definiti da mappe non invertibili.*

Nel caso di spazi di sequenze biinfinite la mappa σ è invertibile. Inoltre sia σ che la sua inversa sono continue rispetto alla topologia che abbiamo appena definito. Infatti se due sequenze x, y sono abbastanza vicine, ovvero coincidono almeno nei $2n + 1$ elementi centrali, allora le loro immagini $\sigma(x), \sigma(y)$ coincidono almeno nei $2n - 1$ elementi centrali.

Definizione 32. *Un subshift (o spazio di shift) è un sottoinsieme chiuso e σ -invariante di uno shift totale. Equivalentemente: sia \mathcal{F} un insieme qualunque di blocchi; l'insieme $X = X_{\mathcal{F}}$ delle sequenze che non contengono alcun elemento di \mathcal{F} formano uno subshift ed ogni subshift si può scrivere in questa forma.*

L'introduzione della dinamica simbolica collega lo studio dei sistemi dinamici a settori apparentemente molto distanti. Ad esempio la seguente definizione giustifica il legame tra certi sistemi discreti e la teoria dell'informazione.

Definizione 33. *Sia X un sottoinsieme di uno shift totale e sia $\mathcal{B}_N(X)$ l'insieme di tutti i blocchi di lunghezza N che appaiono negli elementi di X . Il linguaggio di X si definisce come*

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_N \mathcal{B}_N(X).$$

Si può dimostrare che il linguaggio di uno spazio di shift determina univocamente lo spazio di shift. In questo modo si può indicare uno spazio di shift, a partire dal linguaggio che esso descrive, indicando quali blocchi sono ammessi o quali non sono ammessi. Dato uno spazio di shift X ed un numero naturale N si possono costruire due spazi di shift associati, definiti sull'alfabeto $\mathcal{B}_N(X)$.

Definizione 34. *Lo shift potenza massimale X^N è lo spazio di shift su $\mathcal{B}_N(X)$ ottenuto considerando ogni elemento di X come una sequenza di blocchi di lunghezza N che non si intersechino.*

$$X^N = \{\dots x_{[-N,-1]}x_{[0,N-1]}x_{[N,2N-1]}\dots : x \in X\}$$

Lo shift a blocchi massimale $X^{[N]}$ è lo spazio di shift su $\mathcal{B}_N(X)$ ottenuto considerando ogni elemento di X come una sequenza di blocchi di lunghezza N che si sovrappongono nel modo seguente:

$$X^{[N]} = \{\dots x_{[-1,N-2]}x_{[0,N-1]}x_{[1,N]}\dots : x \in X\}$$

Sia $x = \dots x_{-1}.x_0x_1\dots \in X$ e X uno spazio di shift su \mathcal{A} . Si può trasformare x in una sequenza $y = \dots y_{-1}.y_0y_1\dots$ su un altro alfabeto \mathcal{C} nel seguente modo. Si fissano due interi m, n tali che $-m \leq n$. Per calcolare l' i -esimo simbolo y_i si usa una funzione Φ che dipende dai simboli che compongono x dalla posizione $i - m$ alla posizione $i + n$. Φ è una mappa a blocco fisso che trasforma i blocchi di lunghezza $(m + n + 1)$ ammessi in X in simboli di \mathcal{C} :

$$y_i = \Phi(x_{i-m}x_{i-m+1}\dots x_{i+n}).$$

Definizione 35. *La mappa $\phi : X \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ che trasforma x in y secondo Φ è detta sliding block code (codifica a blocco scivolante) con memoria m e predizione n indotta da Φ . Se Y è uno spazio di shift contenuto in $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ e $\phi(X) \subseteq Y$ possiamo anche scrivere $\phi : X \rightarrow Y$.*

Ogni sliding block code si può considerare come una semplice «traduzione» in un nuovo alfabeto del vecchio spazio di shift sostituendo X nel ruolo del dominio con il relativo shift a blocchi massimale $X^{[n+m+1]}$.

In analogia con la caratterizzazione degli spazi di shift come sottoinsiemi chiusi e σ -invarianti di uno shift totale, gli sliding block code possono essere caratterizzati come quelle mappe tra spazi di shift che sono continue e che commutano con σ . Questo risultato è noto come Teorema di Curtis-Hedlund-Lyndon.

La mappa di scorrimento σ e la sua inversa sono gli esempi più semplici di sliding block code.

Definizione 36. *Se uno sliding block code $\phi : X \rightarrow Y$ è surgettivo, esso viene detto anche mappa fattore o codifica fattore (factor map, factor code). In tal caso diciamo anche che Y è un fattore di X . Se ϕ è iniettivo viene chiamato embedding di X in Y . Se è bigettivo esso viene detto coniugio (topologico). Questa proprietà è equivalente ad affermare che ϕ ha un inversa che è pure una sliding block code.*

Ogni potenza σ^i della mappa di scorrimento è un coniugio di un certo spazio in sé.

Definizione 37. *Uno spazio di shift di tipo finito (SFT) è uno spazio di shift che può essere descritto attraverso un insieme finito di blocchi non ammessi. Equivalentemente, un SFT può essere descritto in termini di blocchi consentiti come segue: per qualche intero M , se u è un blocco consentito di lunghezza maggiore o uguale ad M , se u' è il suffisso di u di lunghezza M ed a è un simbolo, allora ua è un blocco ammesso se e solo se $u'a$ è ammesso.*

In altre parole, dato un certo blocco ed un simbolo, per stabilire se possiamo concatenare quel simbolo al blocco ottenendo un blocco ammissibile è sufficiente controllare gli ultimi M simboli che formano u . Un tale SFT viene detto «ad M passi».

Ogni SFT X ad M passi è coniugato ad un SFT ad 1 passo. Per descrivere il coniugio prendiamo un nuovo alfabeto \mathcal{C} contenente tutti i blocchi di lunghezza M che sono ammessi in X e definiamo la funzione Φ come quella che trasforma i blocchi di lunghezza M in X e li trasforma in simboli di \mathcal{C} . La corrispondente sliding block code ϕ è evidentemente bigettiva e la sua immagine è un SFT ad 1 passo.

Un SFT ad 1 passo può essere descritto concretamente con un grafo semplice ovvero una coppia $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. \mathcal{V} è un insieme di vertici (o stati) e \mathcal{E} è un insieme di archi. Ogni arco ha un vertice iniziale ed uno finale e si suppone che ogni vertice ha almeno un arco entrante ed uno uscente. Per rappresentare un SFT X , scegliamo come insieme di vertici \mathcal{V} l'alfabeto di X e per ogni blocco di lunghezza 2 ab ammesso in X esiste un arco dal vertice a al vertice b .

A sua volta un grafo semplice si può rappresentare attraverso la sua matrice di adiacenza ovvero una matrice A $n \times n$, con $n = \#\mathcal{V}$, tale che:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste un arco dal vertice } i \text{ al vertice } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esiste un altro modo per descrivere i subshift di tipo finito.

Definizione 38. Siano C un insieme finito ed $r, l : C \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ due funzioni. Dotiamo C della topologia discreta e definiamo

$$\Sigma = \{c \in \prod_{-\infty}^{\infty} C \mid l(c_{i+1}) = r(c_i) \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Verificare l'equivalenza di quest'ultima definizione con la precedente è un po' complesso e dunque si rimanda a [8] e [9]. Nel secondo di questi articoli, in particolare, sono enunciati alcuni risultati che rendono effettivamente utile questa nuova definizione. In particolare la definizione 38 suggerisce un'altra rappresentazione dei SFT attraverso matrici: definiamo la matrice A in modo che l'elemento A_{ij} sia uguale alla cardinalità dell'insieme

$$\{c \in C \mid l(c) = i, r(c) = j\}.$$

E' evidente che la matrice A così definita identifica il subshift (a meno di coniugio).

2.2 Il ferro di cavallo

Il ferro di cavallo di Smale è un esempio semplice di insieme invariante che presenta al suo interno una dinamica caotica (che dal punto di vista simbolico si esplicita in una dinamica caotica a 2 simboli). Non potendo, in questa tesi, trattare i casi più generali analizziamo, in breve, la costruzione di Smale per dare un'idea. Unitamente al capitolo sulle Linked Twist Maps si vuole chiarire il legame tra la natura topologica delle immagini di certe curve mediante certe mappe con la complessità delle dinamiche simboliche. Ci occorrono alcune definizioni e alcuni risultati preliminari.

Teorema 39. Sia X_0 un punto fisso iperbolico per la mappa ϕ e sia $A = D\phi(X_0)$.

1. Esiste una curva regolare iniettiva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (oppure $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$) tale che:
 - $\gamma(0) = X_0$;
 - $\gamma'(0)$ è un autovettore di A con autovalore λ_1 tale che $|\lambda_1| < 1$;
 - l'immagine $\gamma(\mathbb{R})$ della curva è un insieme invariante per la mappa ϕ e inoltre se $\phi(\gamma(p)) = \gamma(p_1)$ allora $p \mapsto p_1(p)$ è una mappa continua.
 - per ogni $p \in \mathbb{R}$ si ha che $|p_1(p)| < |p|$ e che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^k(\gamma(p)) = X_0$ con convergenza esponenziale.

Chiamiamo questa curva separatrice stabile (o più in generale varietà stabile).

2. Esiste una curva regolare iniettiva $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (oppure $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$) tale che:

- $\sigma(0) = X_0$;
- $\sigma'(0)$ è un autovettore di A con autovalore λ_2 tale che $|\lambda_2| > 1$;
- l'immagine $\sigma(\mathbb{R})$ della curva è un insieme invariante per la mappa ϕ e inoltre se $\phi(\sigma(p)) = \sigma(p_2)$ allora $p \mapsto p_2(p)$ è una mappa continua.
- per ogni $p \in \mathbb{R}$ si ha che $|p_2(p)| > |p|$ e che $\lim_{k \rightarrow -\infty} \phi^k(\sigma(p)) = X_0$ con convergenza esponenziale.

Chiamiamo questa curva separatrice instabile (o più in generale varietà instabile).

Una dimostrazione di questo risultato è presentata in [7].

Definizione 40. Sia P un punto fisso iperbolico per una mappa ϕ . Sia Q un elemento dell'intersezione della separatrice stabile con quella instabile relative al punto P . Allora Q si dice punto omoclinico.

Se $Q = \gamma(t) = \sigma(s)$ e le tangenti alle due separatrici in Q , $\gamma'(t)$ e $\sigma'(s)$, sono linearmente indipendenti allora Q si dice punto omoclinico trasversale.

Osservazione 41. Esperimenti empirici dovuti a Poincaré e a molti altri che ne hanno ripreso le idee nella seconda metà del '900 mostrano svariati esempi in cui le separatrici relative ad un punto fisso iperbolico, effettivamente, si intersecano. Il legame di queste intersezioni con il caos, di cui daremo un esempio tra poco, permette di affermare che, senza volerlo, Poincaré nei suoi studi ha effettivamente scoperto il caos. Tuttavia quest'ottica e lo stesso concetto di caos sono stati introdotti solo nel 1970 quando utilizzando i calcolatori è stato osservato che integrando numericamente certi sistemi dinamici si ottenevano figure «strane» molto simili a quelle descritte, solo a parole, da Poincaré agli inizi del '900.

Analizziamo ora la costruzione di Smale che porta a individuare il cosiddetto ferro di cavallo.

Sia P un punto fisso iperbolico per la mappa ϕ e Q un punto omoclinico trasversale. Sia C un intorno del segmento di separatrice stabile compreso tra P e Q . Vogliamo studiare l'effetto dell'iterazione della mappa ϕ su

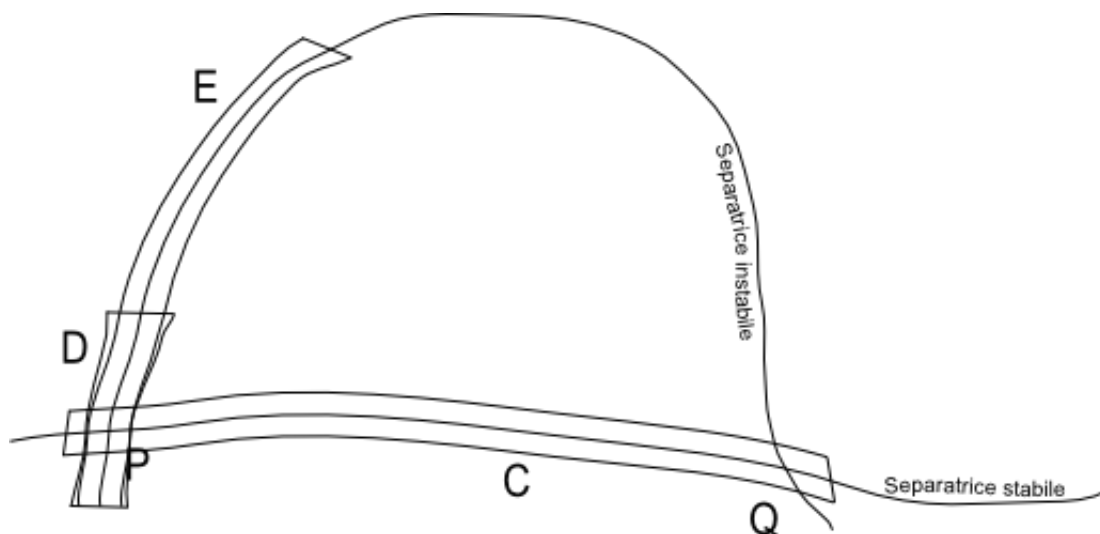


Figura 2.2: La mappa ϕ agisce sull'intorno C del segmento di separatrice che congiunge i punti P e Q . Gli insiemi D ed E sono le immagini di due iterazioni successive.

C . L'immagine $\phi(C)$ risulta contratta lungo la direzione della separatrice stabile e dilatata lungo la direzione della separatrice instabile come in figura 2.2. Questo comportamento si spiega facilmente considerando la natura degli autovalori nel teorema 39 e la continuità della mappa ϕ . Iterando la mappa ϕ questa deformazione viene accentuata ed esiste un certo intero n per cui $\phi^n(C)$ è totalmente ripiegata come un ferro di cavallo che interseca C in un intorno del punto P e in un intorno del punto Q . Ovvero $\phi^n(C) \cap C$ ha due componenti connesse. Cambiamo coordinate mediante un diffeomorfismo in modo che il segmento PQ lungo la separatrice diventi un segmento di retta e C diventi un quadrato $[0, 1]^2$. Vedi figura 2.3. Definiamo $g = \phi^n$.

Iteriamo la mappa g e consideriamo le immagini successive: $C \cap g(C) \cap g^2(C)$ è formato di quattro rettangoli verticali; $C \cap g(C) \cap g^2(C) \cap g^3(C)$ è formato di 8 rettangoli verticali e in generale $\bigcap_{k=0}^N g^k(C)$ è formato di 2^N rettangoli verticali definibili come prodotto di 2^N sottointervalli disgiunti di $I = [0, 1]$ per I . Allora:

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} g^k(C) = K \times I$$

dove K è l'insieme di Cantor. Operando lo stesso ragionamento sulla mappa inversa g^{-1} si ottiene che $\bigcap_{k=0}^N g^{-k}(C)$ è formato da 2^N rettangoli orizzontali

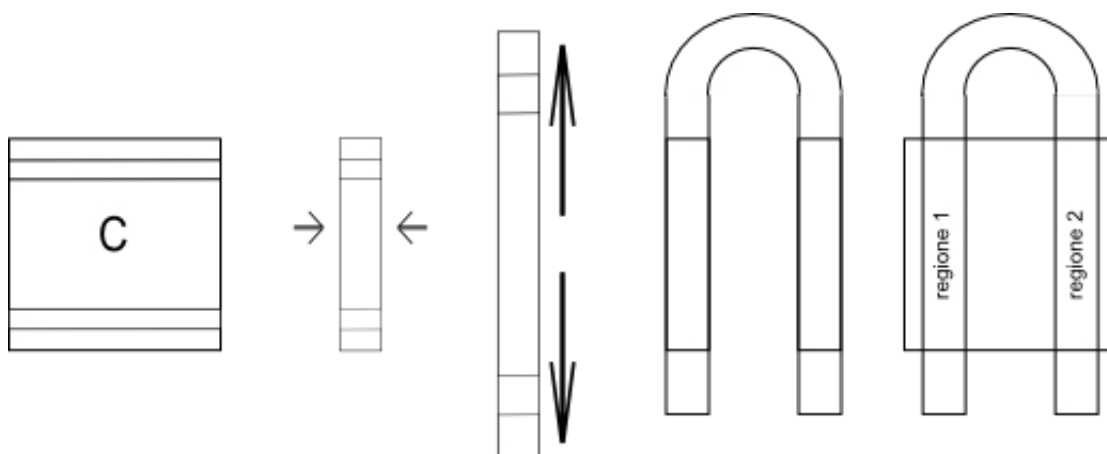


Figura 2.3: La costruzione della mappa a ferro di cavallo. A destra il risultato finale. Da sinistra: il quadrato unitario con evidenziate le regioni che vengono trasformate nella regione 1 e nella regione 2 nel risultato finale; il quadrato viene compresso, dilatato e ripiegato a ferro di cavallo.

e che in generale

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} g^{-k}(C) = I \times K$$

e intersecando le iterazioni positive con quelle negative

$$\bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} g^{-k}(C) = K \times K = \Lambda$$

si ottiene il prodotto di due insiemi di Cantor. L'insieme Λ per sua definizione è invariante per la mappa g e si chiama insieme di Smale.

La dinamica simbolica

Abbiamo visto che nella prima iterazione di g l'insieme $g(C)$ ha due componenti connesse, nella seconda ne ha 4, eccetera. Sia X un punto di Λ . Allora X deve appartenere ad una delle due componenti connesse e dunque possiamo associare ad X un numero tra 1 e 2. Analogamente ciascuna delle due componenti connesse di $G(C)$ viene mandata in un insieme composto di 2 componenti connesse cosicché possiamo associare a $g(X)$ e dunque ad X un altro valore tra 1 e 2. Considerando le infinite (positive e negative) iterazioni della mappa g occorse per definire l'insieme Λ ci accorgiamo che ad ogni punto di questo insieme possiamo associare una sequenza biinfinita di numeri scelti tra 1 e 2. Si suol dire che la sequenza che ne deriva descrive la storia del punto X perchè per ogni iterazione ci dice in quale componente

connessa si trova l'immagine iterata di X . Consideriamo ora l'insieme di tutte le possibili storie ovvero di tutte le sequenze biinfinite di numeri scelti tra 1 e 2. Questo insieme è

$$\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$$

che si può dotare della topologia descritta nella sezione 2.1.

Teorema 42. *Detta Φ la funzione che associa ad ogni punto $X \in \Lambda$ la sua storia $\{s_k\} \in \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$, Φ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. La continuità di Φ deriva dalla definizione della topologia su $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ e dal fatto che g è continua. Verifichiamo che Φ è iniettiva. Se le storie associate a due punti x, y coincidono per tutti gli indici $k > 0$ allora, per ogni $k > 0$, $f^k(x)$ e $f^k(y)$ si trovano nello stesso rettangolo verticale di larghezza $\frac{1}{2^k}$. Dunque la differenza di ordinata fra loro è minore di $\frac{1}{2^k}$ per ogni k e dunque essi hanno la stessa ordinata. Analogamente se le storie associate a due punti coincidono per tutti gli indici $k < 0$ la differenza di ascissa tra i due punti è minore di $\frac{1}{2^k}$ per ogni k e dunque essi hanno la stessa ascissa. \square

Lemma 43. *Per il ferro di cavallo vale la seguente proprietà di coniugio:*

$$s(\Phi(X)) = \Phi(g(X)).$$

Definizione 44. *Sia f un diffeomorfismo di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{T}^2 . Un insieme H invariante per f si dice iperbolico se esistono due costanti $c > 0$ e $\lambda > 1$ tali che per ogni punto $X \in H$ esistono due vettori V_1, V_2 tali che per ogni $m \in \mathbb{N}$*

$$|Df^m(X)V_1| \leq c\lambda^{-m}|V_1|$$

$$|Df^m(X)V_2| \geq \frac{1}{c}\lambda^m|V_2|$$

Ad esempio, un punto fisso iperbolico forma un insieme iperbolico.

L'insieme di Smale è iperbolico scegliendo $V_1 = (1, 0)$, $V_2 = (0, 1)$, $c = 1$ e $0 < \lambda < 1/2$.

Riassumiamo nel seguente teorema la costruzione di Smale.

Teorema 45. *Sia f un diffeomorfismo di \mathbb{R}^2 o \mathbb{T}^2 , P un punto fisso iperbolico e Q un punto omoclinico trasversale. Allora esiste un intero n ed un insieme compatto Λ , contenente sia P che Q , invariante ed iperbolico per la mappa $g = f^n$, tale che:*

$$\Phi : \Lambda \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$$

è un omeomorfismo e che

$$g|_{\Lambda} = \Phi^{-1} \circ s \circ \Phi$$

dove s è lo scorrimento di Bernoulli.

Il risultato di Smale ha un'ipotesi molto forte: la presenza di un punto fisso iperbolico o, più in generale, di un insieme iperbolico, non è di facile verifica numerica. In [10] il risultato di Smale viene generalizzato. In questo articolo si risponde alla domanda: Quando una mappa continua si fattorizza su un subshift con un alfabeto ad M simboli? La risposta verte intorno alla scelta del numero M , detto «crossing number», e tutte le argomentazioni usate non fanno uso dell'ipotesi di iperbolicità ma solo di considerazioni di natura topologica.

Vogliamo ora generalizzare il risultato di Smale, senza utilizzare l'ipotesi di iperbolicità. Descriviamo in breve la costruzione e poi la formalizziamo.

Detto Q un quadrato chiuso nel piano costruiamo una mappa topologica

$$\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che $\phi(Q)$ intersechi Q in due componenti che chiamiamo U_1, U_2 . Supponiamo che le preimmagini di U_1, U_2 , che chiameremo rispettivamente V_1, V_2 , siano strisce verticali che connettono il lato superiore ed il lato inferiore di Q e

$$V_1 \cup V_2 = Q \cap \phi^{-1}(Q).$$

In generale le iterate ϕ^k di ϕ non sono definite in tutto Q e dunque costruiamo l'insieme invariante:

$$I = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \phi^k(Q)$$

in cui tutte le iterate ϕ^k sono ben definite. Bisognerà ovviamente verificare che I non sia vuoto. Ad ogni punto $p \in I$ associamo una sequenza biinfinita di simboli $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ nell'alfabeto $A = \{1, 2\}$ in modo che:

$$\phi^{-k}(p) \in V_{s_k}$$

e dunque risulti:

$$p \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \phi^k(V_{s_k})$$

Risulta così definita una mappa da I nello spazio di sequenze S . Sotto opportune condizioni possiamo mostrare che questa mappa ha un'inversa

$\tau : S \rightarrow I$, ossia che ad ogni sequenza $s \in S$ possiamo associare un punto $p \in I$ con la proprietà suddetta e che τ è un omeomorfismo.

Per definizione di τ è evidente che

$$\phi^{-k}(\phi^{-1}(p)) \in V_{s_{k+1}}$$

cioè che $\tau^{-1}\phi|_I\tau = \sigma$. In altre parole $\phi|_I$ è topologicamente equivalente a σ .

Prima di formalizzare la precedente costruzione facciamo alcune osservazioni.

Definizione 46. *Se ϕ è una mappa topologica di uno spazio topologico T in sé e se ψ è una mappa topologica di uno spazio topologico S in sé diciamo che la seconda definisce un sottosistema della prima se esiste un omeomorfismo τ di S in $\tau(S) \subset T$ tale che*

$$\phi\tau = \tau\psi$$

Bisogna notare che spesso confondiamo un sistema (che è una coppia formata da un insieme e da una mappa su di esso) con la mappa che lo definisce. Questo non crea confusione perchè una funzione identifica univocamente il proprio dominio.

Ciò che vogliamo mostrare è proprio che σ definisce un sottosistema di ϕ . Si può intendere questo risultato come un'altro aspetto del caos: conoscendo in quali strisce V_{s_k} si trova $\phi^k(p)$ per $|k| < K$ non possiamo prevedere alcunché sul comportamento delle orbite fuori da questo insieme, indipendentemente da quanto grande scegliamo K .

Passiamo ora alla formalizzazione di quanto detto.

Definizione 47. *Fissato un certo $\mu \in (0, 1)$ diciamo che una certa curva $y = u(x)$ è orizzontale se per $0 \leq x \leq 1$ si ha $0 \leq u(x) \leq 1$ e inoltre*

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu|x_1 - x_2| \quad \text{per } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1.$$

Se u_1, u_2 sono due curve orizzontali e se

$$0 \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq 1$$

definiamo striscia orizzontale l'insieme

$$U = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; \quad u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

Chiamiamo $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mu)$ l'insieme di queste strisce orizzontali. Infine definiamo il diametro di una striscia U :

$$d(U) = \max_{0 \leq x \leq 1} (u_2(x) - u_1(x))$$

In modo analogo definiamo le curve verticali, le strisce verticali, la classe $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mu)$ delle strisce verticali e il diametro di una striscia verticale.

Le strisce orizzontali e verticali sono ovviamente insiemi compatti per cui possiamo enunciare il seguente lemma.

Lemma 48. *Se $U^1 \supset U^2 \supset U^3 \supset \dots$ è una sequenza di strisce orizzontali annidate e se $d(U^k) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ allora*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U^k$$

è una curva orizzontale.

Le curve orizzontali e le curve verticali possono essere utilizzate per rappresentare i punti del quadrato come si evince dal seguente lemma.

Lemma 49. *Una curva orizzontale $y = u(x)$ ed una verticale $x = v(y)$ si intersecano esattamente in un punto.*

Dimostrazione. Un punto di intersezione (x, y) delle due curve ha per ascissa uno zero della funzione $x - v(u(x))$. Per la definizione si ha

$$|v(u(x_1)) - v(u(x_2))| \leq \mu |u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu^2 |x_1 - x_2|.$$

Dato che $\mu^2 < 1$ la funzione $x - v(u(x))$ è strettamente crescente; inoltre è minore di 0 per $x = 0$ e maggiore di 0 per $x = 1$. Perciò ha esattamente uno zero. \square

Osservazione 50. *La mappa che associa ad una coppia di curve (u, v) il punto di Q in cui si intersecano $z = (x, y)$ è lipschitziana rispetto alle norme*

$$\|u\| + \|v\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \max_{0 \leq y \leq 1} |v(y)|$$

e

$$|z| = |x| + |y|$$

Formuliamo ora formalmente le ipotesi sulla mappa ϕ .

Ipotesi 1 Sia $A = \{1, 2, \dots, n\}$ e assumiamo che U_a, V_a siano rispettivamente strisce disgiunte orizzontali e disgiunte verticali in Q per ogni $a \in A$. La mappa ϕ è un omeomorfismo di V_a in U_a per ogni $a \in A$. Inoltre si richiede che i bordi verticali di V_a siano mandati nei bordi verticali di U_a e similmente per i bordi orizzontali.

Ipotesi 2 Se V è una striscia verticale contenuta in $\bigcup_{a \in A} V_a$ allora, per ogni $a \in A$

$$\phi^{-1}(V) \cap V_a = \widetilde{V}_a$$

è una striscia verticale non vuota e per qualche fissato $\nu \in (0, 1)$ deve essere

$$d(\widetilde{V}_a) \leq \nu d(V_a).$$

Analogamente se U è una striscia orizzontale in $\bigcup_{a \in A} U_a$ allora

$$\phi(U) \cap U_a = \widetilde{U}_a$$

è una striscia orizzontale non vuota e

$$d(\widetilde{U}_a) \leq \nu d(U_a).$$

Teorema 51. *Se ϕ è un omeomorfismo che soddisfa le ipotesi 1 e 2 rispetto ad una certa classe $\{U_a | a \in A\}$ di strisce orizzontali ed una certa classe $\{V_a | a \in A\}$ di strisce verticali allora l'insieme delle sequenze di elementi di A con lo scorrimento σ è un sottosistema di ϕ ; ovvero esiste un omeomorfismo τ di S in Q tale che:*

$$\phi\tau = \tau\sigma$$

In particolare $\tau(S)$ è un sottoinsieme invariante e compatto di Q .

Dimostrazione. Vogliamo determinare quali $p \in Q$ sono tali che $\phi^{-k}(p) \in V_{s_k}$ per $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Per fare questo definiamo induttivamente per $n \geq 1$ gli insiemi

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} = V_{s_0} \cap \phi^{-1}(V_{s_{-1} \dots s_{-n}})$$

e verifichiamo induttivamente che, per l'ipotesi 2, ciascuno di questi insiemi è una striscia verticale. Inoltre, per la stessa ipotesi, sussiste la seguente relazione tra i diametri:

$$d(V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \nu d(V_{s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \nu^n d(V_{s_{-n}}) \leq \nu^n$$

e dunque il diametro di $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Per definizione, $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$ coincide con l'insieme

$$\begin{aligned} & \{p \in Q \mid \phi^k(p) \in V_{s_k} \text{ per } k = 0, 1, \dots, n\} = \\ & \{p \in Q \mid \phi^{-k}(p) \in V_{s_k} \text{ per } k = 0, -1, \dots, -n\} \end{aligned}$$

e dunque vale la seguente inclusione

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} \subset V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n+1}}.$$

In virtù del lemma 48, l'intersezione

$$V(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} = \{p \in Q \mid \phi^{-k}(p) \in V_{s_k} \text{ per } k = 0, -1, \dots\}$$

definisce una curva verticale che dipende esattamente dalla parte della sequenza s con indici positivi.

Analogamente, definiamo induttivamente per $n \geq 2$ gli insiemi

$$U_{s_1 s_2 \dots s_n} = U_{s_1} \cap \phi(U_{s_2 \dots s_n})$$

che per l'ipotesi 2 sono strisce orizzontali annidate l'una nell'altra e il cui diametro si può maggiorare con ν^{n-1} . Allora, essendo $\phi(V_{s_k}) = U_{s_k}$, si ha che

$$\begin{aligned} U(s) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{s_1 s_2 \dots s_n} = \{p \in Q, \phi^{-k+1}(p) \in U_{s_k} \text{ per } k \geq 1\} \\ &= \{p \in Q, \phi^{-k}(p) \in V_{s_k} \text{ per } k \geq 1\} \end{aligned}$$

è una curva orizzontale, dipendente dalla parte di s con indici negativi. Per il lemma 49, l'intersezione

$$V(s) \cap U(s) = \{p \in Q \mid \phi^{-k} \in V_{s_k} \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

definisce esattamente un punto di Q . Definiamo allora la mappa $\tau : S \rightarrow Q$ associando ad ogni sequenza s il punto $V(s) \cap U(s)$.

Per costruzione, è evidente che se $\tau(s) = p$ allora $\tau(\sigma(s)) = \phi(p)$, ovvero che

$$\tau\sigma = \phi\tau.$$

La continuità di τ segue immediatamente dalla costruzione: se s, s' sono due sequenze che coincidono negli elementi di indice k , per ogni $|k| < n$, allora i punti $\tau(s), \tau(s')$ si trovano nella stessa striscia verticale $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$ e nella stessa striscia orizzontale $U_{s_1 \dots s_n}$. Dato che $d(V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \nu^n$, $d(U_{s_1 \dots s_n}) \leq \nu^{n-1}$ si ha che

$$|\tau(s) - \tau(s')| \leq (1 - \mu)^{-1}(\nu^n + \nu^{n-1})$$

e questo prova la continuità di τ .

L'iniettività di τ segue invece dal fatto che le striscie V_a sono disgiunte.

L'immagine di τ è l'insieme

$$\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \phi^k(W) \quad \text{con} \quad W = \bigcup_{a \in A} V_a$$

cioè un sottinsieme compatto di Q , invariante per costruzione. Dall'iniettività di τ segue che questa mappa è invertibile ed è continua anche la sua inversa. \square

2.3 Dinamica caotica

Esaminiamo qui alcuni concetti di natura topologica che saranno utilizzati nel resto delle argomentazioni.

Per comodità chiameremo arco una qualunque immagine omeomorfa dell'intervallo unitario $[0, 1]$.

Un rettangolo generalizzato è un insieme \mathcal{R} , sottoinsieme di uno spazio metrico, che sia omeomorfo al quadrato unitario $\mathcal{Q} = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Rettangolo generalizzato, rettangolo, regione rettangolare saranno considerati termini equivalenti.

Se \mathcal{R} è un rettangolo generalizzato ed $h : \mathcal{Q} \rightarrow h(\mathcal{Q}) = \mathcal{R}$ è un omeomorfismo, chiamiamo contorno ϑR di R l'insieme:

$$\vartheta R = h(\partial\mathcal{Q}),$$

dove $\partial\mathcal{Q}$ è l'usuale bordo del quadrato unitario. L'insieme $\vartheta\mathcal{R}$ è ben definito essendo indipendente dal particolare omeomorfismo h scelto per definire \mathcal{R} . Chiameremo rettangolo orientato la coppia:

$$\tilde{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}, \mathcal{R}^-)$$

dove \mathcal{R} è un rettangolo generalizzato e

$$\mathcal{R}^- = \mathcal{R}_s^- \cup \mathcal{R}_d^-$$

è unione di due archi compatti disgiunti contenuti in $\vartheta\mathcal{R}$ che chiameremo, compatibilmente con la lettera in pedice, lato sinistro e lato destro di \mathcal{R}^- . Una volta definito \mathcal{R}^- possiamo definire anche \mathcal{R}^+ come la chiusura di $\vartheta\mathcal{R} - \mathcal{R}^-$ e scegliere come dividere \mathcal{R}^+ :

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}_i^+ \cup \mathcal{R}_s^+,$$

in lato inferiore e lato superiore. L'orientazione scelta potrebbe non corrispondere affatto all'idea intuitiva di destra, sinistra, superiore e inferiore.

Introduciamo il concetto di dinamica caotica che verrà usato in questa tesi.

Definizione 52. *Sia Z uno spazio metrico e $\psi : Z \supseteq D_\psi \rightarrow Z$ una mappa. Siano inoltre $\mathcal{D} \subseteq D_\psi$ non vuoto e $m \geq 2$ intero. Diciamo che ψ induce una dinamica caotica ad m simboli in \mathcal{D} se esistono m insiemi compatti, a due a due disgiunti:*

$$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_m \subseteq \mathcal{D},$$

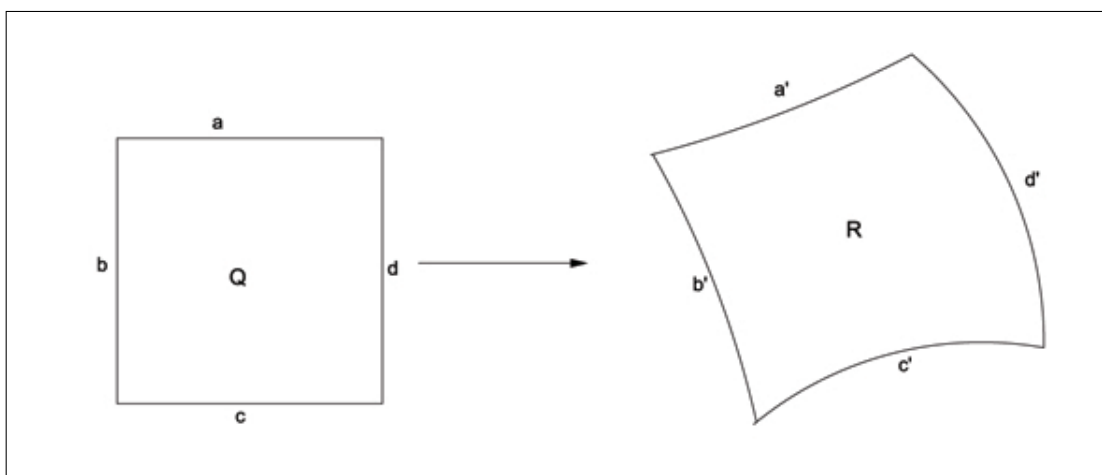


Figura 2.4: Una regione rettangolare omeomorfa ad un quadrato. Una possibile orientazione è tale che $a' = \mathcal{R}_s^-$, $c' = \mathcal{R}_d^-$, $b' = \mathcal{R}_s^+$, $d' = \mathcal{R}_d^+$

tali che, per ogni sequenza m -aria biinfinita

$$(s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_m = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}},$$

esiste una sequenza biinfinita di punti

$$(w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}},$$

tale che

$$\forall i \in \mathbb{Z} \ w_i \in \mathcal{K}_{s_i} \ e \ w_{i+1} = \psi(w_i).$$

Osservazione 53. Aggiungiamo due note alla definizione precedente

1. Se $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ è una sequenza k -periodica per qualche intero $k \geq 1$, allora esiste una sequenza k -periodica $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ come nella definizione precedente.
2. Dalla definizione precedente segue che se ψ è continua ed iniettiva sull'insieme

$$\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{D},$$

allora esiste un insieme compatto non vuoto

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K},$$

per cui valgono le seguenti:

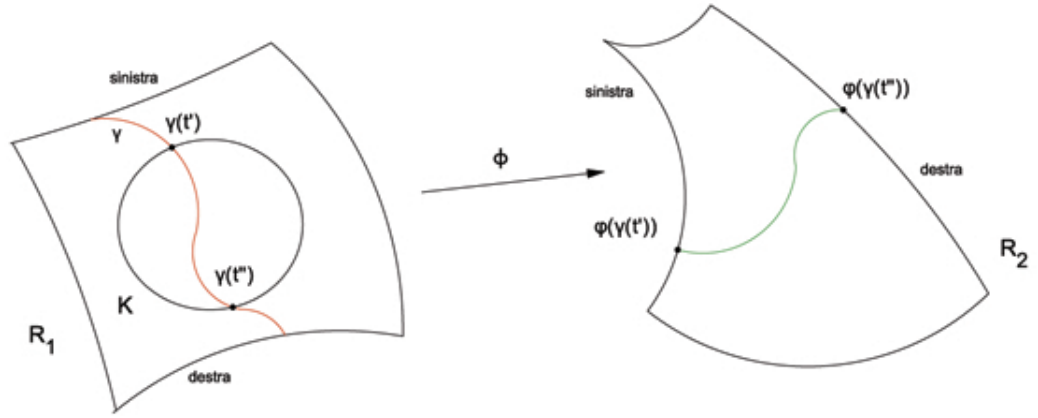


Figura 2.5: La proprietà di deformazione lungo i cammini.

- \mathcal{J} è invariante per ψ ;
- $\psi|_{\mathcal{J}}$ è semiconiugata allo scorrimento di Bernoulli su m simboli ovvero esiste una mappa continua $g : \mathcal{J} \rightarrow \Sigma_m$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{J} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{J} \\
 g \downarrow & & \downarrow g \\
 \Sigma_m & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_m
 \end{array}$$

commuti. Qui σ è lo scorrimento di Bernoulli.

Le argomentazioni che useremo per mostrare la natura caotica, secondo la definizione 52, della dinamica che esplicheremo nel capitolo 3.4 saranno tutte di natura prettamente topologica. Il legame con la teoria dei sistemi caotici è dato dal prossimo lemma che richiede, però, una definizione preliminare (si veda [1] - Definizione 3.1 e Lemma 3.1).

Definizione 54. Sia ϕ una funzione di \mathbb{R}^2 in sé e $\widetilde{\mathcal{R}}_1 = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^-)$, $\widetilde{\mathcal{R}}_2 = (\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^-)$ due rettangoli orientati. Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}_1$ compatto. Diciamo che (\mathcal{K}, ϕ) deforma $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ in $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ lungo le curve e scriviamo:

$$(\mathcal{K}, \phi) : \widetilde{\mathcal{R}}_1 \rightleftarrows \widetilde{\mathcal{R}}_2$$

se valgono le seguenti (vedi figura 2.5):

- ϕ è continua su \mathcal{K} ;

- per ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(0) \in \mathcal{R}_{1,s}^-$ e $\gamma(1) \in \mathcal{R}_{1,d}^-$ (o $\gamma(1) \in \mathcal{R}_{1,s}^-$ e $\gamma(0) \in \mathcal{R}_{1,d}^-$) esiste un sottointervallo $[t', t''] \subseteq [0, 1]$ tale che

$$\gamma(t) \in \mathcal{K}, \quad \phi(\gamma(t)) \in \mathcal{R}_2, \quad \forall t \in [t', t'']$$

e, inoltre, $\phi(\gamma(t'))$ e $\phi(\gamma(t''))$ appartengono a diverse componenti connesse di \mathcal{R}_2^- .

Lemma 55. Siano $\widetilde{\mathcal{R}}_1 = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^-)$, $\widetilde{\mathcal{R}}_2 = (\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^-)$ due rettangoli orientati in \mathbb{R}^2 e ϕ, ψ funzioni continue di \mathbb{R}^2 . Se sono verificate le seguenti due ipotesi:

- Esistono $m_1 \geq 1$ sottoinsiemi compatti e disgiunti a due a due $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{m_1} \subseteq \mathcal{R}_1$ tali che $(\mathcal{H}_i, \phi) : \widetilde{\mathcal{R}}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_2$ per $i = 1, \dots, m_1$;
- Esistono $m_2 \geq 1$ sottoinsiemi compatti e disgiunti a due a due $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{m_2} \subseteq \mathcal{R}_2$ tali che $(\mathcal{K}_i, \psi) : \widetilde{\mathcal{R}}_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_1$ per $i = 1, \dots, m_2$.

e se almeno uno tra m_1 ed m_2 è maggiore o uguale a 2, allora la funzione composta $\sigma = \psi \circ \phi$ induce una dinamica caotica su $m_1 \times m_2$ simboli nell'insieme:

$$\mathcal{H}^* = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, m_1 \\ j=1, \dots, m_2}} \mathcal{H}'_{i,j}, \quad \text{ove } \mathcal{H}'_{i,j} = \mathcal{H}_i \cup \phi^{-1}(\mathcal{K}_j).$$

Il legame tra il comportamento delle immagini iterate di certe mappe su certe curve e la dinamica caotica è complesso ed esula dai fini di questa tesi. È opportuno, però, citare gli studi conosciuti che legano i due fenomeni. Nel capitolo 2.4 analizzeremo il comportamento di una mappa molto simile alla mappa σ del lemma precedente. La discussione che verrà affrontata, seguendo la costruzione esposta in [5], andrebbe generalizzata ed astratta a meno di omeomorfismi. Questa restrizione non è determinante dato che il punto centrale di questa tesi si basa su considerazioni di natura squisitamente topologica.

2.4 Linked twist maps

Le linked twist maps sono uno strumento molto potente utilizzato in svariati studi che utilizzano la teoria dei sistemi dinamici e del caos. Introduciamo le principali caratteristiche di questo strumento e ci rifacciamo a [5].

Sia A una corona circolare nel piano avente raggio esterno 3 e raggio interno $\rho \in [2, 3[$.

Definizione 56. Definiamo la twist map T di A in coordinate polari come segue:

$$T(r, \theta) = \left(r, \theta + 2\pi \left(\frac{r - \rho}{3 - \rho} \right) \right).$$

T lascia invariato il bordo di A e ruota ogni circonferenza interna definita da

$$r = \text{costante}, \quad \rho < r < 3$$

di un angolo pari a $2\pi(r - \rho)/(3 - \rho)$. Si verifica facilmente che T è una diffeomorfismo e che è una mappa che conserva l'area. Chiamiamo T twist map perchè il suo effetto sulla parte interna di A è appunto una attorcigliamento. Possiamo apprezzare questo effetto guardando l'immagine (di T e dell'iterazione della stessa mappa T) del segmento di retta $[2, 3] \times 0$ come in figura 2.4.

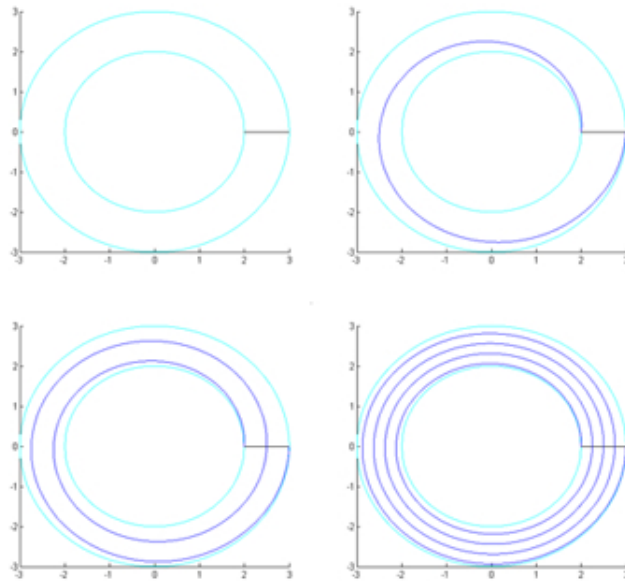


Figura 2.6: Twist map: in celeste la corona circolare A . Immagine di un raggio (in nero) tramite una, due e quattro iterazioni della mappa (in blu).

Siano ora A_1, A_2 due copie di A centrate rispettivamente nei punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. L'unione $A_1 \cup A_2$ è uno spazio M omeomorfo ad un doppio disco chiuso meno 3 buchi. Sia T_i la twist map su A_i . Dato che T_i fissa il bordo di A_i possiamo estendere T_i a tutto M ponendo $T_i = Id$ su $M - A_i$. Le nuove T_i sono omeomorfismi di M .

Definizione 57. Per ogni coppia di interi $j, k \neq 0$, definiamo l'omeomorfismo $f_{j,k} = T_2^j \circ T_1^k$. Chiamiamo $f_{j,k}$ una linked twist map (LTM).

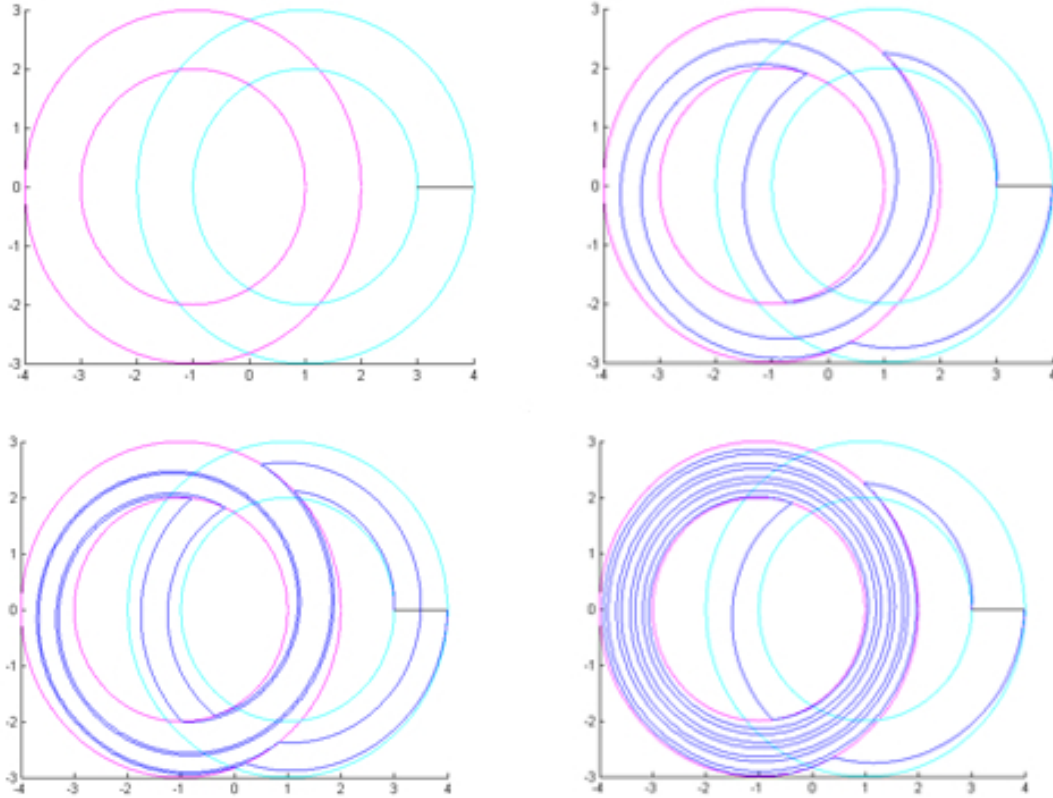


Figura 2.7: Linked twist maps: Immagine di un raggio dell'anello A_1 tramite le mappe $f_{1,1}, f_{2,1}$ e $f_{4,1}$.

Il risultato principale che ci interessa nell'uso della LTM è dato dal prossimo teorema. Non entriamo nei dettagli della dimostrazione, di cui diamo solo un'idea, per la quale si rimanda a [5]

Teorema 58. Per ogni $j, k \in \mathbb{Z} - 0$ esiste un insieme $\Lambda_{j,k} \subset M$ compatto e invariante che, unitamente a $f_{j,k}$, è topologicamente coniugata con il subshift di tipo finito (con lo scorrimento di Bernoulli) generato dalla matrice:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

ove $\alpha = 2|j||k| - |k| - |j| + 1$.

Dimostrazione. Consideriamo una LTM $f_{j,k}$ con $j, k > 0$. Il caso in cui uno almeno tra j e k è negativo si deduce da questo con piccole modifiche. Sia Q la componente connessa di $A_1 \cap A_2$ contenuta nel semipiano superiore e Q' l'altra componente contenuta nel semipiano inferiore. Siano A, B, C, D i vertici di Q in modo che AD si trovi sul bordo esterno di A_1 e BC sul bordo interno. Vogliamo costruire un quadrilatero contenuto in Q e per questo definiamo 4 curve lisce in Q (vedi figura 2.8).

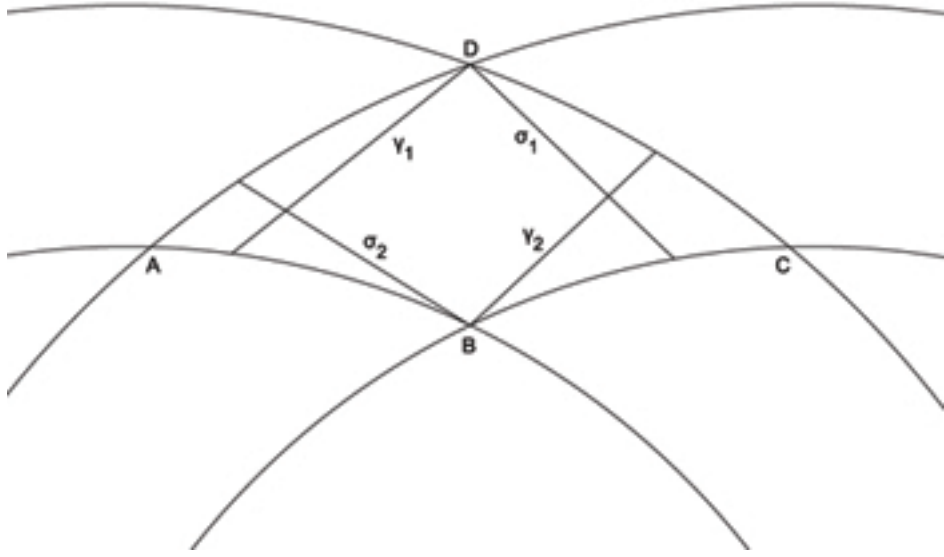


Figura 2.8: Individuazione della regione R in Q .

Sia $\gamma_1 \subset Q$ una curva liscia che colleghi D con qualche punto su AB e tale che $T_1^k(\gamma_1) \subset CD$. γ_1 è univocamente definita da queste condizioni. Analogamente sia γ_2 una curva liscia in Q che colleghi B con un punto su CD e tale che $T_1^k(\gamma_2) \subset AB$. Siano poi σ_1 una curva che colleghi D con un punto di BC e tale che $T_2^{-j}(\sigma_1) \subset AD$ e infine σ_2 una curva che colleghi B con un punto di AD e tale che $T_2^{-j}(\sigma_2) \subset BC$. Rimuovendo la parte finale di queste quattro curve la loro concatenazione descrive una curva chiusa che delimita una regione quadrilaterale R contenuta in Q . Chiamiamo a, b, c, d i vertici di R , con $b = B, d = D$ e $A = \gamma_1 \cap \sigma_2, c = \sigma_1 \cap \gamma_2$.

Con un'opportuna rotazione di R costruiamo un secondo quadrilatero $R' \subset Q'$ di vertici a', b', c', d' .

Infine, scegliendo ρ sufficientemente vicino a 3 possiamo assumere che

$$T_1^{-k}(ad) \cap Q' = \emptyset, \quad T_1^{-k}(bc) \cap Q' = \emptyset, \quad T_2^j(cd) \cap Q' = \emptyset, \quad T_2^j(ab) \cap Q' = \emptyset$$

L'insieme invariante $\Lambda_{j,k}$ è dato da $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f_{j,k}^n(R \cup R')$ ovvero consiste di tutti quei punti le cui orbite sono interamente contenute in $R \cup R'$. $\Lambda_{j,k}$ è ovviamente invariante. La mappa T_1^k agisce sui lati ad e bc contraendoli e mappandoli nel bordo di A_2 , mentre i lati ad e cd sono dilatati e avvolti intorno A_1 per circa k giri completi. Si verifica che $T_1^k(ab)$ e $T_1^k(cd)$ intersecano R solo $k-1$ volte e dunque $T_1^k(R) \cap R$ consiste di $k-1$ «strisce», ognuna delle quali connette $a'b'$ con $c'd'$. Per motivazioni analoghe $T_1^k(R') \cap R$ consiste di k «strisce» parallele alle «strisce» che formano $T_1^k(R) \cap R$. Anche $T_1^k(R') \cap R'$ consiste di $k-1$ strisce parallele a quelle di $T_1^k(R) \cap R'$. Ora applichiamo T_2^j a ciascuna striscia S_1 in $T_1^k(R) \cap R$ o in $T_1^k(R') \cap R$. T_2^j attorciglia S_1 intorno ad A_2 almeno j volte. $T_2^j(S_1) \cap R$ consiste di $j-1$ strisce che connettono ad a bc . Analogamente $T_2^j(S_1) \cap R'$ consiste di j strisce che connettono $b'c'$ a $a'd'$. Per un'altra striscia S_2 presa in $T_1^k(R) \cap R'$ o in $T_1^k(R') \cap R'$ si ha che $T_2^j(S_2) \cap R$ consiste di j strisce mentre $T_2^j(S_2) \cap R'$ consiste di $j-1$ strisce tutte parallele alle immagini di $T_2^j(S_1)$. Riassumendo $f_{j,k}(R) \cap R$ consiste di α strisce con $\alpha = 2|j||k| - |j| - |k| + 1$ e $f_{j,k}(R) \cap R'$ consiste di $\alpha - 1$ strisce. Similmente $f_{j,k}(R') \cap R$ è composto di $\alpha - 1$ strisce e $f_{j,k}(R') \cap R'$ di α strisce. Anche $f_{j,k}^{-1}$ è una LTM e dunque lo stesso ragionamento vale per questa mappa. Ora $f_{j,k}$ mappa ogni striscia in $f_{j,k}^{-1}(R \cup R') \cap (R \cup R')$ diffeomorficamente in una striscia in $(R \cup R') \cap f_{j,k}(R \cup R')$. Applicando ora la costruzione della sezione ?? si ottiene la proprietà di coniugio con un certo subshift. Si può applicare a questo punto un risultato in [6] per mostrare che $f_{j,k}$ è coniugato al subshift generato da \mathcal{A} come nella tesi. \square

Dal precedente teorema deriva il seguente corollario che ci collega ai risultati della sezione 2.2.

Corollario 59. *Esistono infiniti punti omoclinici trasversali per $f_{j,k}$ nell'insieme $\Lambda_{j,k}$.*

Capitolo 3

Dinamiche di specie

3.1 Un po' di storia

Il modello che viene qui introdotto è stato proposto indipendentemente dal demografo americano Alfred James Lotka nel 1924 e dal matematico italiano Vito Volterra nel 1926. Nel 1925, durante una conversazione con Umberto D'Ancona, giovane zoologo, Volterra apprese di una curiosa circostanza nelle statistiche dei mercati ittici dell'Adriatico. Risultò che durante la Prima Guerra Mondiale, e immediatamente dopo, quando le attività di pesca erano drasticamente diminuite, era in compenso aumentato il numero di predatori tra i pesci catturati. Le motivazioni del modello di Volterra miravano a spiegare perchè la popolazione di una specie di predatori (una specie di squali) fosse aumentata a fronte della diminuzione di popolazione di una specie preda (le sardine). Il suo modello può essere visto come il primo della categoria dei modelli consumatore-risorsa.

L'idea di fondo del modello è mettere in risalto il fatto che le evoluzioni di popolazione delle due specie non sono né indipendenti né compatibili ma si influenzano a vicenda in quella che potremmo chiamare «lotta per la sopravvivenza». Il modello originale è molto semplice e non tiene conto di una serie di dati realistici quali la disomogeneità ambientale e la presenza di altre specie. Così, ad esempio, come vedremo i predatori in assenza di prede moriranno di fame mentre le prede in assenza di predatori cresceranno in modo esponenziale. Inoltre l'interazione tra prede e predatori è in qualche modo una scatola chiusa. Non si riesce ad evidenziare fattori istintivi degli esemplari delle due specie: nessuno ci assicura che una preda che incontri un predatore tenti di scappare o piuttosto rimanga ferma a farsi mangiare, o che un predatore divori tante prede quante ne incontri o che ad un certo punto possa essere sazio.

3.2 Una specie

Vediamo la costruzione di un modello per misurare la popolazione totale di una singola specie in un dato ambiente. Il modello semplice prevede condizioni di vita «ideali», non realizzabili e viene completato aggiungendo fenomeni sociali che alterano la crescita o la decrescita del totale della popolazione.

3.2.1 Modello banale: Crescita illimitata

Consideriamo la popolazione di una certa specie vivente in un certo ambiente. Il tasso di natalità è il rapporto tra il numero delle nascite durante un fissato periodo di tempo e la quantità della popolazione media dello stesso periodo. Spesso il periodo di tempo scelto è di un anno ma questa è solo una convenzione. Analogamente il tasso di mortalità è il rapporto tra il numero delle morti durante un fissato periodo di tempo e la quantità della popolazione media dello stesso periodo. Il tasso di crescita si può allora definire come la variazione netta di popolazione per unità di tempo divisa per il totale della popolazione media durante lo stesso periodo di tempo. Sia $y = y(t)$ la popolazione al tempo t che varii da y a $y + \Delta y$ nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$. Allora il relativo tasso di crescita medio è

$$\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}. \quad (3.1)$$

Nelle nostre ipotesi il valore $y(t)$ viene assunto solo per determinati valori della variabile t . Si può pensare di estendere y (es. per interpolazione) ad una funzione reale di variabile reale non negativa con derivata prima continua. Consideriamo allora il limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)}. \quad (3.2)$$

La funzione così definita è il tasso di crescita della popolazione al tempo t . Possiamo supporre che la popolazione abbia un tasso di crescita costante α , caso che si verifica quando il numero di nascite e il numero di morti in un breve periodo di tempo Δt sono in un rapporto fisso con la popolazione totale. Questi rapporti saranno funzioni lineari di Δt indipendenti dalla quantità di popolazione. La variazione netta di popolazione sarà allora $\alpha y \Delta t$, ovvero:

$$\alpha = \frac{y'}{y} = \frac{d}{dt} \log y \quad (3.3)$$

che porta all'equazione di crescita illimitata:

$$y(t) = e^{\alpha t}y(0). \quad (3.4)$$

Nell'osservazione naturale delle popolazioni di esseri viventi il tasso di crescita può dipendere da svariati fattori. Assumiamo per il momento che esso dipenda unicamente dalle risorse di cibo per individuo (che chiameremo σ) e che queste siano costanti nel tempo ($\sigma > 0$ costante). In queste condizioni dovrà esistere un minimo σ_0 necessario ad alimentare la popolazione. Al di sotto di questa soglia il tasso di crescita è negativo, al di sopra è positivo e in coincidenza di quel valore si ha crescita zero. Un modo semplice per rendere questo meccanismo è imporre che il tasso di crescita sia una funzione lineare di $\sigma - \sigma_0$

$$\alpha = a(\sigma - \sigma_0), \quad a > 0 \quad (3.5)$$

e dunque

$$\frac{dy}{dt} = a(\sigma - \sigma_0)y(t). \quad (3.6)$$

Qui a e σ_0 sono costanti, dipendenti solo dalla specie osservata, e σ è un parametro, dipendente dal particolare ambiente. La precedente equazione ha soluzione:

$$y(t) = \exp[ta(\sigma - \sigma_0)]y(0). \quad (3.7)$$

Dunque, a seconda che $\sigma > \sigma_0$, $\sigma = \sigma_0$, $\sigma < \sigma_0$ la popolazione totale crescerà illimitatamente, rimarrà costante o tenderà a zero. Interpretando il modello, dato che i valori frazionari di y non hanno alcun significato, l'ipotesi che y tenda a zero significa effettivamente l'estinzione della specie nell'ambiente considerato in un tempo finito.

3.2.2 Modello meno banale: fenomeni sociali e crescita limitata

Nella realtà nessuna popolazione può crescere illimitatamente. Sarebbe più realistico assumere che, una volta superata una certa soglia η , il tasso di crescita sia negativo. Chiameremo il valore η popolazione limite, osservando che esso non deve essere necessariamente un estremo superiore per il valore effettivo della popolazione ma solo un valore che vede l'inversione di tendenza nella variazione della popolazione totale. Le ragioni della crescita negativa potrebbero essere varie: malattie, scarse risorse di cibo, sovraffollamento. Racchiudiamo tutte queste cause nell'espressione fenomeni sociali. Ancora una volta scegliamo la via più semplice per modellare questi fenomeni;

assumeremo che il tasso di crescita sia proporzionale a $\eta - y$:

$$\alpha = c(\eta - y), \quad c > 0 \text{ costante.}$$

Otteniamo in questo modo l'equazione di crescita limitata:

$$\frac{dy}{dt} = c(\eta - y)y; \quad c > 0, \quad \eta > 0. \quad (3.8)$$

Notiamo che una riscrittura della precedente equazione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = c\eta y - cy^2$$

suggerisce che nel tempo Δt la variazione di popolazione sia inferiore di $cy^2 \Delta t$ rispetto a quanto sarebbe senza la presenza di fenomeni sociali (3.4) o (3.6). Possiamo interpretare cy^2 come un valore proporzionale al numero medio di incontri tra y individui, una sorta di frizione sociale.

Gli equilibri di (3.8) si hanno per $y = 0$ e $y = \eta$. L'equilibrio per $y = \eta$ è asintoticamente stabile perché la derivata di $c(\eta - y)y$ in η vale $-c\eta < 0$. Il bacino di η è $\{y | y > 0\}$ infatti $y(t)$ tende ad η , crescendo per $0 < y(0) < \eta$, decrescendo per $\eta < y(0)$.

Un modello più ricco per la popolazione di una singola specie si può realizzare in questo modo:

$$\frac{dy}{dt} = M(y)y. \quad (3.9)$$

Qui il tasso di crescita M è supposto variabile e dipende solo dalla popolazione totale. È plausibile assumere che esista una limitazione per la popolazione η tale che $M(\eta) = 0$ e $M(y) < 0$ per $y > \eta$. Per completare il modello possiamo imporre le ulteriori ipotesi:

- Gli equilibri sono esattamente in $y = 0$, $y = \eta$ e ovunque $M(y) = 0$
- L'equilibrio in $y = 0$ è instabile
- Un equilibrio ξ è asintoticamente stabile se e solo se esiste un $\epsilon > 0$ tale che $M > 0$ nell'intervallo $[\xi - \epsilon, \xi[$ ed $M < 0$ nell'intervallo $] \xi, \xi + \epsilon]$.

3.3 Prede e predatori

Costruiamo ora il modello di Volterra-Lotka e ne studiamo le principali proprietà. Questo modello verrà arricchito nella sezione successiva e così

dotato di interessanti e più ricche dinamiche. Tuttavia le proprietà che qui studieremo saranno in gran parte mantenute dal modello della prossima sezione e lo studio delle stesse è più agile in una versione più semplice del modello.

Vogliamo ora considerare un ambiente in cui convivano due specie delle quali una sia preda e l'altra predatrice. Chiameremo x e y rispettivamente le popolazioni delle prede e dei predatori. La popolazione delle prede costituisce il totale di cibo disponibile per i predatori. Il cibo consumato in totale dai predatori (nell'unità di tempo) è proporzionale al numero di incontri con le prede che supporremo a sua volta proporzionale ad xy . In questo modo la disponibilità di cibo in ogni momento per il singolo predatore sarà proporzionale ad $x(t)$. Per il momento non consideriamo i fenomeni sociali descritti nella sezione precedente e otteniamo la seguente equazione che ricalca l'equazione (3.6):

$$\frac{dy}{dt} = a(x - \sigma_0)y \quad (3.10)$$

ove $a > 0$ e $\sigma_0 > 0$ sono costanti. Riscriviamo per comodità l'equazione precedente come

$$y' = (Cx - D)y; \quad C > 0, D > 0. \quad (3.11)$$

Per quanto riguarda le prede, in un periodo di tempo Δt piccolo, i predatori ne mangiano un certo numero. Si suppone che questo numero dipenda solo dall'entità delle due popolazioni e che sia proporzionale a Δt . Chiamiamo questo numero $f(x, y)\Delta t$.

E' ragionevole pensare che $f(x, y)$ sia proporzionale a y : il doppio di predatori mangerà il doppio di prede nell'intervallo di tempo piccolo Δt . Analogamente $f(x, y)$ sarà proporzionale a x : se ci sono il doppio di prede raddoppierà la possibilità per un predatore di incontrare una preda. Dunque scegliamo $f(x, y) = \beta xy$, essendo $\beta > 0$ una costante. Si suppone che la specie preda sia fornita di risorse di cibo costanti e sufficienti ad accrescere la sua popolazione in assenza di predatori. In sostanza la popolazione delle prede è regolata dall'equazione:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy. \quad (3.12)$$

3.3.1 Le equazioni di Volterra-Lotka

Arriviamo così alle equazioni di Volterra-Lotka per la dinamica preda-predatore:

$$\frac{dx}{dt} = (A - By)x \quad (3.13a)$$

$$\frac{dy}{dt} = (Cx - D)y \quad (3.13b)$$

Gli equilibri di questo sistema sono in $(0, 0)$ e in $z = (D/C, A/B)$. Si verifica subito che l'origine è un punto di sella, dunque instabile. Gli autovalori in z sono una coppia di immaginari puri e dunque non possiamo trarne informazioni sulla stabilità. Tracciando le due linee:

$$\dot{x} = 0 : y = \frac{A}{B},$$

$$\dot{y} = 0 : x = \frac{D}{C},$$

dividiamo il I quadrante del piano cartesiano in 4 settori che chiameremo a loro volta quadranti seguendo la solita numerazione come in figura 3.1.

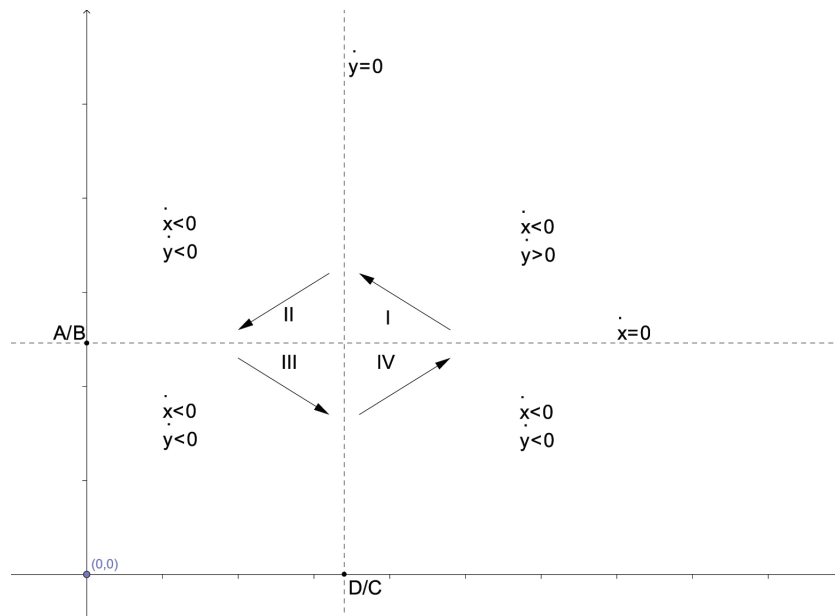


Figura 3.1: Un primo grafico mostra l'orientazione del campo vettoriale che definisce il sistema di equazioni di Volterra-Lotka.

In ciascun quadrante il segno di \dot{x} e \dot{y} è costante. Le semirette positive dell'asse x e dell'asse y sono traiettorie aventi l'origine come α -limite e ω -limite rispettivamente. Infatti in mancanza di prede i predatori moriranno e in mancanza di predatori le prede si moltiplicheranno senza limite. Le altre soluzioni $(x(t), y(t))$ ruotano intorno al punto z attraversando i 4 quadranti. Ad esempio una soluzione con condizione iniziale

$$\begin{aligned}x(0) &= u > \frac{D}{C} > 0, \\y(0) &= v > \frac{A}{B} > 0\end{aligned}$$

nel quadrante I ha un intervallo massimale $J = [0, \tau[$ in cui resta nel primo quadrante. Siano

$$\begin{aligned}A - Bv &= -r < 0, \\Cu - D &= s > 0.\end{aligned}$$

Finché $t \in J$, $x(t)$ decresce e $y(t)$ cresce. Dunque

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \log x(t) &= \frac{x'}{x} = A - By \leq -r, \\ \frac{d}{dt} \log y(t) &= \frac{y'}{y} = Cx - D \geq s\end{aligned}$$

e cioè:

$$\frac{D}{C} \leq x(t) \leq ue^{-rt}, \quad (3.17a)$$

$$\frac{A}{B} \leq y(t) \leq ve^{st} \quad (3.17b)$$

per $0 \leq t < \tau$. Dalla seconda disuguaglianza di (3.17a) vediamo che τ è finito. Da (3.17a) e (3.17b) deduciamo che per $t \in J$ la soluzione è confinata nella regione compatta:

$$\begin{aligned}\frac{D}{C} &\leq x(t) \leq u, \\ \frac{A}{B} &\leq y(t) \leq ve^{st}\end{aligned}$$

Allora la soluzione $(x(\tau), y(\tau))$ deve essere definita nel punto τ e appartenere alla frontiera del I quadrante. Vista la segnatura del campo deve essere $x(\tau) = D/C$ e quindi per valori $t > \tau$ la traiettoria deve entrare nel II quadrante. Procedendo analogamente si dimostra che la traiettoria deve attraversare tutti i quadranti. Per il momento non possiamo dire se la traiettoria sia una spirale convergente a z , convergente ad un ciclo limite o divergente. Cerchiamo una funzione di Lyapounov H .

3.3.2 Analisi della stabilità e ritratto in fase

Cerchiamo una funzione della forma $H(x, y) = F(x) + G(y)$. Vogliamo che sia

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) \\ &= \frac{dF}{dx}\dot{x} + \frac{dG}{dy}\dot{y} \\ &= x\frac{dF}{dx}(A - By) + y\frac{dG}{dy}(Cx - D) \leq 0.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Possiamo ottenere $\dot{H} = 0$ ponendo:

$$\frac{x\frac{dF}{dx}}{Cx - D} = \frac{y\frac{dG}{dy}}{By - A} = \text{costante}$$

ovvero (prendendo la costante uguale a 1):

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= C - \frac{D}{x} \Rightarrow F(x) = Cx - D \log x \\ \frac{dG}{dy} &= B - \frac{A}{y} \Rightarrow G(y) = By - A \log y\end{aligned}$$

Infine la funzione

$$H(x, y) = Cx - D \log x + By - A \log y$$

definita per $x, y > 0$ è costante sulle soluzioni di (3.13). I segni di $\frac{\partial H}{\partial x}$ e $\frac{\partial H}{\partial y}$ mostrano che z è un minimo assoluto per H e dunque la funzione $H - H(z)$ è una funzione di Lyapounov per z . Allora z è un equilibrio stabile.

//////Nota su nessun ciclo limite.

In virtù dell'analisi svolta finora possiamo enunciare il seguente teorema che descrive la forma delle soluzioni del sistema di equazioni (3.13):

Teorema 60. *Le traiettorie dell'equazioni (3.13) diverse dal punto di equilibrio z e dai semiassi positivi sono orbite chiuse*

Dimostrazione. Sia $w = (u, v)$, $u, v > 0$, $w \neq z$. Per quanto detto in precedenza deve esistere una sequenza infinita $t_i | i \in \mathbb{Z}$, strettamente crescente in i , tale che $\Phi^{t_n}(w)$ sta sulla retta $x = D/C$ e inoltre

$$\begin{aligned}t_n &\rightarrow \infty && \text{se } n \rightarrow \infty, \\ t_n &\rightarrow -\infty && \text{se } n \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

Supponiamo che l'orbita su cui si trova w non sia chiusa. In tal caso la sequenza $\Phi^{tn}(w)$ è monotona lungo la retta $x = D/C$. Non essendoci cicli limite si possono verificare due possibilità:

$$\begin{aligned}\Phi^{tn}(w) &\rightarrow z && \text{se } n \rightarrow \infty \\ \Phi^{tn}(w) &\rightarrow z && \text{se } n \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

H è costante sulla soluzione passante per w quindi dovrebbe essere $H(w) = H(z)$, contro l'ipotesi di minimalità di $H(z)$. \square

Possiamo ora tracciare un ritratto in fase come schematizzato nella figura ???. Esso ci permette di concludere che per ogni coppia di popolazioni iniziali $(x(0), y(0))$ diversa da z e con $x(0), y(0) \neq 0$ le popolazioni dei predatori e delle prede oscilleranno ciclicamente. Indipendentemente dal numero di prede o predatori nessuna delle due specie si estinguerà o crescerà illimitatamente. Inoltre, eccezion fatta per lo stato z , che possiamo considerare improbabile, nessuna delle popolazioni rimarrà costante nel tempo.

3.4 Alternanza stagionale

Ripartiamo dal modello di Volterra-Lotka originale:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases} \quad (3.20)$$

con $a, b, c, d > 0$ coefficienti costanti. Lo studio del sistema si svolge per $x, y \geq 0$. Il sistema (3.20) è conservativo e il suo ritratto in fase ha un centro nel punto

$$P_0 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right),$$

circondato da orbite periodiche percorse in senso antiorario che corrispondono alle curve di livello dell'integrale primo:

$$\mathcal{E}_0(x, y) = dx - c \log x + by - a \log y,$$

che chiameremo energia in analogia con i sistemi meccanici. Possiamo immaginare, come nel modello originale, che le due specie studiate dal modello siano pesci (sardine e squali).

Vorremmo descrivere attraverso questo modello gli effetti della pesca. Possiamo supporre che durante la stagione della pesca la popolazione di entrambe le specie venga ridotta di un tasso proporzionale alla popolazione stessa. Questa assunzione porta al seguente nuovo sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_\mu - by) \\ \dot{y} = y(-c_\mu - dx), \end{cases} \quad (3.21)$$

ove

$$a_\mu = a - \mu \quad e \quad c_\mu = c + \mu$$

sono i coefficienti di crescita modificati tenendo conto del tasso di decrescita della popolazione dovuto alla pesca ($-\mu x(t)$ e $-\mu y(t)$ rispettivamente). Il parametro μ è supposto positivo ma abbastanza piccolo da evitare l'estinzione della popolazione. Il sistema (3.21) è della stessa forma del sistema (3.20) e dunque nel ritratto in fase ha un centro nel punto:

$$P_\mu = \left(\frac{c + \mu}{d}, \frac{a - \mu}{b} \right).$$

Le orbite periodiche che girano intorno a P_μ sono le curve di livello dell'integrale primo

$$\mathcal{E}_\mu(x, y) = dx - c_\mu \log x + by - a_\mu \log y.$$

Confrontando come in figura 3.2 i ritratti in fase dei due sistemi (3.20) ed (3.21) e in particolare le coordinate dei punti P_0 e P_μ si osserva subito (Principio di Volterra) che una pesca moderata ha effetti che favoriscono la popolazione delle prede.

Se prendiamo il modello originale di Volterra (3.20) e introduciamo un «effetto stagionale» sui coefficienti arriviamo a considerare un nuovo sistema della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a(t) - b(t)y) \\ \dot{y} = y(-c(t) - d(t)x), \end{cases} \quad (3.22)$$

con $a, b, c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni periodiche con un periodo comune $T > 0$. In questo ambiente appare naturale la ricerca di soluzioni periodiche (mT -periodiche per qualche intero $m \geq 1$). La risposta alla ricerca di soluzioni periodiche può provenire dal prossimo teorema, per la cui dimostrazione si rimanda a ???. Il termine soluzione, qui e in tutti i prossimi risultati, andrà inteso nel senso di Carathéodory ovvero significa che $(x(t), y(t))$ è assolutamente continua e soddisfa il sistema (3.22) per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Ovviamente tali soluzioni saranno di classe C^1 se i coefficienti del sistema sono continui.

Teorema 61. *Se $b(\cdot)$ e $d(\cdot)$ sono funzioni continue tali che*

$$\forall t \in [0, T] \quad b(t) > 0, \quad d(t) > 0,$$

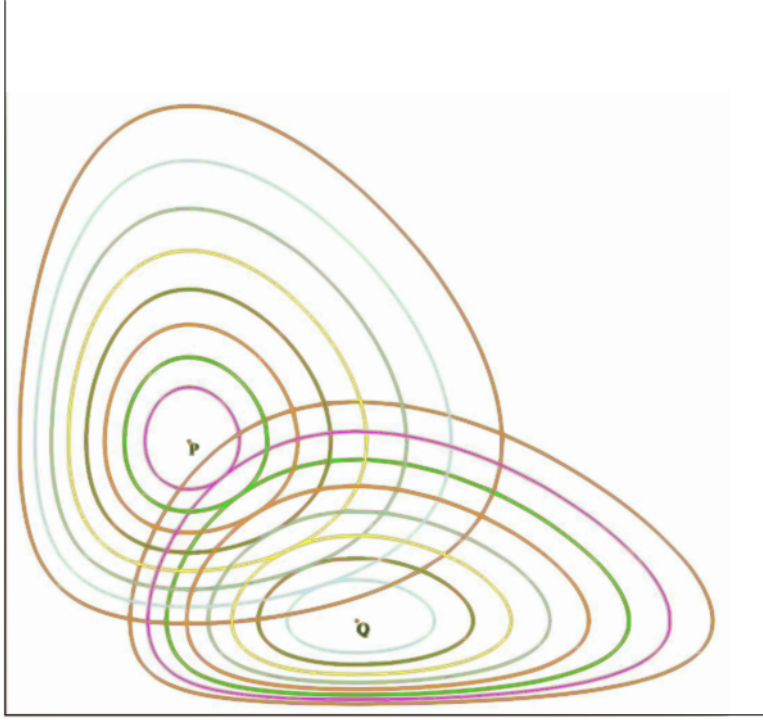


Figura 3.2: Alcune orbite del sistema (3.20) con centro in $P = P_0$ e del sistema perturbato (3.21) con centro in $Q = P_\mu$.

e se $a(\cdot), c(\cdot) \in L^1([0, T])$ sono tali che

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > 0, \bar{c} = \frac{1}{T} \int_0^T c(t) dt > 0$$

allora il sistema (3.22) ha almeno una soluzione T -periodica positiva.

Torniamo al modello originale a coefficienti costanti e supponiamo che l'interazione fra le due specie sia governata dal sistema (3.20) per un certo periodo di tempo di lunghezza r_0 e dal sistema (3.21) per il resto del tempo (ovvero un intervallo di lunghezza r_μ). Supponiamo anche che l'alternanza tra (3.20) ed (3.21) sia periodica ovvero che

$$T = r_0 + r_\mu$$

sia la lunghezza di una stagione e passato il tempo T la dinamica si ripeta periodicamente. Possiamo descrivere questa alternanza con il sistema (3.22) ponendo:

$$a(t) = \hat{a}_\mu(t) = \begin{cases} a & \text{se } 0 \leq t \leq r_0 \\ a - \mu & \text{se } r_0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$c(t) = \hat{c}_\mu(t) = \begin{cases} c & \text{se } 0 \leq t \leq r_0 \\ c + \mu & \text{se } r_0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

e

$$b(t) \equiv b, \quad d(t) \equiv d,$$

con a, b, c, d costanti positive e μ parametro con $0 < \mu < a$. Possiamo allora considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\hat{a}_\mu(t) - by) \\ \dot{y} = y(-\hat{c}_\mu(t) - dx), \end{cases} \quad (3.23)$$

dove le funzioni costanti a tratti \hat{a}_μ e \hat{c}_μ si intendono estese ad \mathbb{R} per periodicità.

Chiaramente il teorema 61 si applica al sistema (3.23) assicurando l'esistenza di soluzioni T -periodiche.

Vogliamo mostrare che il sistema (3.23) genera una dinamica molto ricca. In particolare mostreremo la presenza di dinamiche caotiche per la mappa di Poincaré definita da:

$$\phi : (\mathbb{R}_o^+)^2 \rightarrow (\mathbb{R}_o^+)^2, \quad \phi(z) = \Phi^T(z),$$

dove Φ è il flusso integrale del sistema. Per farlo utilizzeremo una *Linked Twist Map*, applicando i risultati della sezione 2.4 a meno di un certo omeomorfismo.

Abbiamo due regioni anulari \mathcal{A} e \mathcal{B} che si intersecano in due rettangoloidi disgiunti $(R)_1$ e $(R)_2$. Ogni regione anulare viene attorcigliata su se stessa da un omeomorfismo (una twist map) che lascia invariato il bordo della regione anulare. Entrambe le mappe agiscono in una delle due regioni anulari e sono estese, come identità, al resto dell'insieme: l'effetto è un doppio attorcigliamento.

Per prima cosa consideriamo due regioni anulari, che in seguito per semplicità chiameremo anelli, limitate da linee di livello degli integrali primi associati ai sistemi (3.20) ed (3.21). In particolare i bordi, interno ed esterno, di ciascun anello sono traiettorie chiuse che circondano il punto di equilibrio $P = P_0$ oppure il punto di equilibrio $Q = P_\mu$. Chiamiamo questi anelli \mathcal{A}_P e \mathcal{A}_Q . Essi si intersecano in due regioni rettangolari \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 . Descriviamo questa situazione dicendo che i due anelli sono allacciati fra loro. Più avanti daremo condizione sufficienti sulle curve di livello che definiscono \mathcal{A}_P ed \mathcal{A}_Q affinché i due anelli siano effettivamente allacciati fra loro.

Il secondo passo è quello di scegliere un'orientazione per i rettangoli \mathcal{R}_i come spiegato nella sezione 2.3. Il modo in cui si sceglie l'orientazione è

ininfluente per il resto delle argomentazioni. Tuttavia, per fissare le idee, scegliamo di orientare i due rettangoli in modo che il lato sinistro di \mathcal{R}_1 sia quello più vicino a P e il lato sinistro di \mathcal{R}_2 sia quello più vicino al punto Q .

Osserviamo ora che la mappa di Poincaré associata al sistema (3.23) si decompone nel modo seguente:

$$\phi = \phi_\mu \circ \phi_0$$

dove ϕ_0 è la mappa di Poincaré associata al sistema (3.20) sull'intervallo di tempo $[0, r_0]$ e ϕ_μ è la mappa di Poincaré associata al sistema (3.21) sull'intervallo di tempo $[0, r_\mu] = [0, T - r_0]$. Consideriamo ora un cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_1$ con $\gamma(0) \in \mathcal{R}_{1,s}^-$ e $\gamma(1) \in \mathcal{R}_{1,d}^-$. Ripercorrendo la costruzione nella dimostrazione del teorema 58 e osservando che i punti di $\mathcal{R}_{1,s}^-$ si muovono più velocemente dei punti di $\mathcal{R}_{1,d}^-$ sotto l'azione del sistema (3.20) possiamo scegliere un tempo r_0 sufficientemente grande affinché il cammino

$$\theta \mapsto \phi_0(\gamma(\theta))$$

formi una spirale all'interno dell'anello \mathcal{A}_P e attraversi il rettangolo \mathcal{R}_2 entrando in esso dal lato sinistro ed uscendone da quello destro. In altre parole, possiamo scegliere due sottointervalli di $[0, 1]$ tali che $\phi_0 \circ \gamma$ ristretto a ciascuno di essi sia un cammino contenuto in \mathcal{R}_2 che ne connette il lato sinistro e il lato destro. Applichiamo lo stesso ragionamento al sistema (3.21) nel rettangolo \mathcal{R}_2 . Ne deduciamo che, scegliendo un tempo $r_\mu = T - r_0$ abbastanza grande possiamo trasformare ogni cammino in \mathcal{R}_2 che ne connetta il lato sinistro con quello destro in un cammino che attraversa \mathcal{R}_1 almeno una volta, connettendone lato sinistro e lato destro, mediante la mappa ϕ_μ .

Prima di enunciare il risultato ultimo di questa tesi analizziamo due aspetti che ci serviranno nella dimostrazione dello stesso.

Consideriamo il sistema (3.20) e poniamo:

$$\chi_0 = \mathcal{E}_0(P_0) = \min\{\mathcal{E}_0(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

Scelto un $l > \chi_0$, la linea di livello

$$\Gamma_0(l) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 \mid \mathcal{E}_0(x, y) = l\}$$

è un'orbita chiusa (quindi periodica) che circonda P_0 , percorsa in senso antiorario con periodo $\tau_0(l)$. Si dimostra che la mappa

$$\tau_0 :]\chi_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

è strettamente crescente con

$$\lim_{l \rightarrow \chi_0^+} \tau_0(l) = T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}, \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \tau_0(l) = +\infty.$$

Analogamente, per il sistema (3.21) con $0 < \mu < a$, detto

$$\chi_\mu = \mathcal{E}_\mu(P_\mu) = \min\{\mathcal{E}_\mu(x, y) : x > 0, y > 0\}e$$

scelto un $h > \chi_\mu$, la linea di livello

$$\Gamma_\mu(h) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 \mid \mathcal{E}_\mu(x, y) = h\}$$

è un'orbita chiusa che circonda P_μ , percorsa in senso antiorario con periodo $\tau_\mu(h)$. Nuovamente, si verifica che la mappa $h \mapsto \tau_\mu(h)$ è strettamente crescente con

$$\lim_{h \rightarrow \chi_\mu^+} \tau_\mu(h) = T_\mu = \frac{2\pi}{\sqrt{a_\mu c_\mu}}, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \tau_\mu(h) = +\infty.$$

Diamo ora condizioni sufficienti sulle linee di livello affinché i due anelli \mathcal{A}_P e \mathcal{A}_Q siano allacciati.

Tracciamo la retta r che congiunge i punti P e Q e definiamo una relazione d'ordine \preceq tra punti sulla retta r in modo che $A \preceq B$ se e soltanto se la prima coordinata x_A di A è minore o uguale all'analogha coordinata x_B di B . Consideriamo due linee di livello $\Gamma_0(l_1)$ e $\Gamma_0(l_2)$ del sistema (3.20) in modo che sia $\chi_0 < l_1 < l_2$. Chiamiamo $P_{1,-}, P_{1,+}$ i punti di intersezione di $\Gamma_0(l_1)$ con r e $P_{2,-}, P_{2,+}$ i punti di intersezione di $\Gamma_0(l_2)$ con r in modo che valga:

$$P_{2,-} \preceq P_{1,-} \preceq P \preceq P_{1,+} \preceq P_{2,+}.$$

Nella stessa maniera consideriamo due linee di livello $\Gamma_\mu(h_1)$ e $\Gamma_\mu(h_2)$ del sistema (3.21) in modo che sia $\chi_\mu < h_1 < h_2$. Chiamiamo $Q_{1,-}, Q_{1,+}$ i punti di intersezione di $\Gamma_\mu(h_1)$ con r e $Q_{2,-}, Q_{2,+}$ i punti di intersezione di $\Gamma_\mu(h_2)$ con r in modo che valga:

$$Q_{2,-} \preceq Q_{1,-} \preceq Q \preceq Q_{1,+} \preceq Q_{2,+}.$$

Allora è immediato verificare che gli anelli \mathcal{A}_P e \mathcal{A}_Q sono allacciati fra loro se e solo se

$$P_{2,-} \preceq P_{1,-} \preceq Q_{2,-} \preceq Q_{1,-} \preceq P_{1,+} \preceq P_{2,+} \preceq Q_{1,+} \preceq Q_{2,+}.$$

Abbiamo ottenuto una situazione equivalente, a meno di un certo omeomorfismo, a quella del teorema 58. Riassumiamo e formalizziamo il nostro risultato nel seguente teorema conclusivo.

Teorema 62. *Per ogni scelta delle costanti positive a, b, c, d, μ (purchè sia $\mu < a$) e per ogni coppia $(\mathcal{A}_P, \mathcal{A}_Q)$ di anelli allacciati fra loro vale la seguente proprietà: per ogni intero $m \geq 2$ esistono due costanti positive α e β tali che, per ogni*

$$r_0 > \alpha \quad e \quad r_\mu > \beta,$$

la mappa di Poincaré associata al sistema (3.23) induce dinamica caotica su m simboli in \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 .

Dimostrazione. Coerentemente con la costruzione precedente definiamo

$$\mathcal{A}_P = \bigcup_{l_1 \leq l \leq l_2} \Gamma_0(l)$$

e

$$\mathcal{A}_Q = \bigcup_{h_1 \leq h \leq h_2} \Gamma_\mu(h)$$

Per costruzione, questi due anelli sono invarianti per i sistemi (3.20) e (3.21) rispettivamente. Consideriamo le due regioni in cui ogni anello risulta diviso dalla retta r e li chiamiamo $\mathcal{A}_P^t, \mathcal{A}_P^b, \mathcal{A}_Q^t, \mathcal{A}_Q^b$, dove l'apice t indica la parte superiore e l'apice b indica la parte inferiore secondo l'intuizione. Seguendo la stessa convenzione chiamiamo \mathcal{R}^b ed \mathcal{R}^t le due regioni rettangolari in cui si intersecano i due anelli. Siano

$$m_1 \geq 2 \quad e \quad m_2 \geq 1$$

due interi fissati (il caso $m_1 = 1$ e $m_2 \geq 2$ è analogo). Per prima cosa cerchiamo quelle soluzioni del sistema (3.20) che partono da \mathcal{A}_P^b e che attraversano \mathcal{A}_P^t almeno m_1 volte. Effettuiamo una rototraslazione di \mathbb{R}^2 che porti il punto P nell'origine e faccia coincidere la retta r con l'asse x . Le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} \tilde{x} = (x - \frac{c}{d}) \cos \omega + (y - \frac{a}{b}) \sin \omega \\ \tilde{y} = (\frac{c}{d} - x) \sin \omega + (y - \frac{a}{b}) \cos \omega, \end{cases}$$

con $\omega = \arctan(\frac{d}{b})$. Mediante la trasformazione di Prüfer introduciamo le coordinate polari generalizzate in modo da esprimere le soluzioni $\Phi^t(z)$ con condizione iniziale $z = (x_0, y_0) \in \mathcal{A}_P^b$ mediante una coordinata radiale $\rho(t, z)$ ed una coordinata angolare $\theta(t, z)$. Possiamo supporre dunque che $\theta(0, z) \in [-\pi, 0]$. Per ogni $t \in [0, r_0]$ e $z \in \mathcal{A}_P^b$ definiamo il *numero di rotazione*:

$$rot_0(t, z) = \frac{\theta(t, z) - \theta(0, z)}{2\pi},$$

che indica lo scostamento angolare (normalizzato) lungo l'orbita del sistema (3.20) con condizione iniziale in z nell'intervallo di tempo $[0, t]$. Le soluzioni sono funzioni continue delle condizioni iniziali e dunque la funzione $(t, z) \mapsto \theta(t, z)$ è continua così come (per composizione) la mappa $(t, z) \mapsto \text{rot}_0(t, z)$. Vista la definizione del numero di rotazione e dato che le curve di livello sono bordo di insiemi stellati rispetto al punto P (e dunque la corrispondenza tra i punti della curva e coordinate angolari che li rappresentano è bigettiva), abbiamo che:

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbb{Z} : \text{rot}_0(t, z) = j & \iff t = j \tau_0(l), \\ \forall j \in \mathbb{Z} : j < \text{rot}_0(t, z) = j + 1 & \iff j \tau_0(l) < t < (j + 1) \tau_0(l). \end{cases}$$

Sappiamo che la funzione τ_0 è strettamente crescente e dunque che $\tau_0(l_1) < \tau_0(l_2)$. Questa condizione ci servirà per dimostrare che effettivamente, scelto un r_0 abbastanza grande, si ha un attorcigliamento. A questo proposito verifichiamo che, scelto un $r_0 \geq \alpha$, ove

$$\alpha = \frac{(m_1 + 3 + \frac{1}{2})\tau_0(l_1)\tau_0(l_2)}{\tau_0(l_2) - \tau_0(l_1)}, \quad (3.24)$$

per ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_P$, con $\gamma(0) \in \Gamma_0(l_1)$ e $\gamma(1) \in \Gamma_0(l_2)$ vale la seguente inclusione:

$$[\theta(r_0, \gamma(1)), \theta(r_0, \gamma(0))] \supseteq [2\pi n^*, 2\pi(n^* + m_1) - \pi], \quad (3.25)$$

per qualche $n^* = n^*(r_0) \in \mathbb{N}$. Innanzitutto osserviamo che:

$$\forall t > 0 \quad \text{rot}_0(t, \gamma(0)) \geq \left\lfloor \frac{t}{\tau_0(l_1)} \right\rfloor \quad \text{e} \quad \text{rot}_0(t, \gamma(1)) \leq \left\lceil \frac{t}{\tau_0(l_2)} \right\rceil$$

e dunque:

$$\forall t > 0 \quad \text{rot}_0(t, \gamma(0)) - \text{rot}_0(t, \gamma(1)) > t \frac{\tau_0(l_2) - \tau_0(l_1)}{\tau_0(l_1)\tau_0(l_2)} - 2.$$

Per la definizione di α in (3.24), per ogni $t \geq \alpha$:

$$\text{rot}_0(t, \gamma(0)) > m_1 + 1 + \frac{1}{2} + \text{rot}_0(t, \gamma(1)),$$

cioè, tornando agli angoli:

$$\theta(t, \gamma(0)) - \theta(t, \gamma(1)) > 2\pi(m_1 + 1), \quad \forall t \geq \alpha.$$

Sappiamo però che $2\pi(\lceil \frac{t}{\tau_0(l_2)} \rceil - \frac{3}{2}) \leq \theta(t, \gamma(1)) \leq 2\pi \lceil \frac{t}{\tau_0(l_2)} \rceil$ e unendo le ultime due disuguaglianze otteniamo che certamente l'inclusione 3.25 è verificata se scegliamo

$$n^* = n^*(r_0) = \left\lceil \frac{r_0}{\tau_0(l_2)} \right\rceil.$$

Il significato dell'inclusione 3.25 è evidente: nel tempo r_0 il punto $\gamma(0)$ si è spostato di un angolo maggiore di $2\pi(m_1 - \frac{1}{2})$ rispetto a quanto si spostato il punto $\gamma(1)$, ovvero il primo ha compiuto $m_1 - \frac{1}{2}$ giri in più del secondo lungo la propria curva di livello di giacenza. Estendiamo il precedente risultato all'intera curva γ . Per continuità della mappa composta $s \mapsto rot_0(r_0, \gamma(s))$ con $s \in [0, 1]$ è evidente che:

$$\theta(r_0, \gamma(s)), \quad s \in [0, 1] \supseteq [2\pi n^*, 2\pi(n^* + m_1) - \pi].$$

Per il teorema di Bolzano devono esistere m_1 intervalli massimali, a due a due disgiunti, $[t'_i, t''_i] \subseteq [0, 1]$, con $i = 0, \dots, m_1 - 1$, tali che:

$$\theta(r_0, \gamma(s)) \in [2\pi n^* + 2\pi i, 2\pi n^* + 2\pi i + \pi], \quad \forall s \in [t'_i, t''_i], \quad i = 0, \dots, m_1 - 1,$$

e

$$\theta(r_0, \gamma(t'_i)) = 2\pi n^* + 2\pi i \quad \theta(r_0, \gamma(t''_i)) = 2\pi n^* + 2\pi i + \pi.$$

Poniamo ora:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}^b \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}^t,$$

e orientiamo queste regioni rettangolari scegliendo:

$$\mathcal{R}_{1,s}^- = \mathcal{R}_1 \cap \Gamma_0(l_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{1,d}^- = \mathcal{R}_1 \cap \Gamma_0(l_2),$$

e analogamente:

$$\mathcal{R}_{2,s}^- = \mathcal{R}_2 \cap \Gamma_\mu(h_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{2,d}^- = \mathcal{R}_2 \cap \Gamma_\mu(h_2),$$

Definiamo ora gli m_1 insiemi compatti, non vuoti e a due a due disgiunti

$$\mathcal{H}_i = \{z \in \mathcal{A}_P^b : \theta(r_0, z) \in [2\pi n^* + 2\pi i, 2\pi n^* + 2\pi i + \pi]\}, \quad i = 0, \dots, m_1 - 1,$$

e mostriamo, finalmente, che:

$$(\mathcal{H}_i, \phi_0) : \widetilde{\mathcal{R}}_1 \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{R}}_2, \quad i = 0, \dots, m_1 - 1, \quad (3.26)$$

dove, ricordiamo, ϕ_0 è la mappa di Poincaré associata al sistema (3.20). Sia, allora, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_1$, con $\gamma(0) \in \mathcal{R}_{1,s}^-$ e $\gamma(1) \in \mathcal{R}_{1,d}^-$. Per $r_0 \geq \alpha$ e fissato un

certo $i \in 0, \dots, m_1 - 1$, sappiamo che esiste un sottointervallo $[t'_i, t''_i] \subseteq [0, 1]$ tale che $\gamma(t) \in \mathcal{H}_i$ e $\phi_0(\gamma(t)) \in \mathcal{A}_P^t$, $\forall t \in [t'_i, t''_i]$. Si osserva che

$$\mathcal{E}_\mu(\phi_0(\gamma(t'_i))) \leq h_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\mu(\phi_0(\gamma(t''_i))) \geq h_2$$

e dunque esiste un sottointervallo $[t_i^*, t_i^{**}] \subseteq [t'_i, t''_i]$ tale che

$$\phi_0(\gamma(t)) \in \mathcal{R}_2, \quad \forall t \in [t_i^*, t_i^{**}]$$

e

$$\phi_0(\gamma(t_i^*)) \in \mathcal{R}_{2,s}^-, \quad \phi_0(\gamma(t_i^{**})) \in \mathcal{R}_{2,d}^-.$$

Questo dimostra la proprietà di *stretch along the paths* in riferimento agli insiemi \mathcal{H}_i sopra definiti e dunque la (3.26) è verificata.

Ora passiamo al sistema (3.21). Studiamo le soluzioni con condizione iniziale in \mathcal{A}_Q^t e che attraversano \mathcal{A}_Q^b almeno m_2 volte. Come prima effettuiamo una rototraslazione del piano che fa coincidere la retta r con l'asse x e porta il punto Q nell'origine e in questo modo possiamo esprimere le soluzioni con condizione iniziale $w \in \mathcal{A}_Q^t$ mediante coordinate polari $(\tilde{\rho}, \tilde{\theta})$. In particolare $\tilde{\theta}(0, w) \in [0, \pi]$. Per ogni $t \in [0, r_\mu] = [0, T - r_0]$ e $w \in \mathcal{A}_Q^t$, definiremo il numero di rotazione:

$$rot_\mu(t, w) = \frac{\tilde{\theta}(t, w) - \tilde{\theta}(0, w)}{2\pi}.$$

Anche la mappa τ_μ è strettamente crescente ovvero $\tau_\mu(h_1) < \tau_\mu(h_2)$. Verifichiamo che per una scelta di $r_\mu \geq \beta$, con

$$\beta = \frac{(m_2 + 3 + \frac{1}{2})\tau_\mu(h_1)\tau_\mu(h_2)}{\tau_\mu(h_2) - \tau_\mu(h_1)}, \quad (3.27)$$

per ogni curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_Q$, con $\sigma(0) \in \Gamma_\mu(h_1)$ e $\sigma(1) \in \Gamma_\mu(h_2)$ la seguente inclusione è verificata:

$$[\tilde{\theta}(r_\mu, \sigma(1)), \tilde{\theta}(r_\mu, \sigma(0))] \supseteq [\pi(2n^{**} + 1), 2\pi(n^{**} + m_2)], \quad (3.28)$$

per un certo $n^{**} = n^{**}(r_\mu) \in \mathbb{N}$. La verifica è analoga al caso visto precedentemente e risulta che la scelta per n^{**} è

$$n^{**} = \left\lceil \frac{r_\mu}{\tau_\mu(h_2)} \right\rceil.$$

In virtù dell'inclusione (3.28) e per continuità della mappa composta $s \mapsto rot_\mu(r_\mu, \sigma(s))$, $s \in [0, 1]$ segue che:

$$\tilde{\theta}(r_\mu, \sigma(s)), \quad s \in [0, 1] \supseteq [2\pi n^{**} + \pi, 2\pi(n^{**} + m_2)].$$

Applichiamo anche stavolta il teorema di Bolzano e deduciamo che devono esistere m_2 intervalli massimali, a due a due disgiunti, $[s'_i, s''_i] \subseteq [0, 1]$, per $i = 0, \dots, m_2 - 1$, tali che

$$\tilde{\theta}(r_\mu, \sigma(s)) \in [2\pi n^{**} + \pi + 2\pi i, 2\pi n^{**} + 2\pi + 2\pi i], \quad \forall s \in [s'_i, s''_i], \quad i = 0, \dots, m_2 - 1,$$

e

$$\tilde{\theta}(r_\mu, \sigma(s'_i)) = 2\pi n^{**} + \pi + 2\pi i, \quad \tilde{\theta}(r_\mu, \sigma(s''_i)) = 2\pi n^{**} + 2\pi + 2\pi i.$$

Per le regioni rettangolari $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ e $\widetilde{\mathcal{R}}_2$ definite come nel caso precedente introduciamo gli m_2 insiemi compatti, non vuoti e a due a due disgiunti

$$\mathcal{K}_i = w \in \mathcal{A}_Q^t : \tilde{\theta}(r_\mu, w) \in [2\pi n^{**} + \pi + 2\pi i, 2\pi n^{**} + 2\pi + 2\pi i], \quad i = 0, \dots, m_2 - 1.$$

Verifichiamo allora che

$$(\mathcal{K}_i, \phi_\mu) : \widetilde{\mathcal{R}}_2 \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{R}}_1, \quad i = 0, \dots, m_2 - 1, \quad (3.29)$$

essendo ϕ_μ la mappa di Poincaré associata al sistema (3.21). Scegliamo un cammino $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_2$, con $\sigma(0) \in \mathcal{R}_{2,s}^-$ e $\sigma(1) \in \mathcal{R}_{2,d}^-$. Per $r_\mu \geq \beta$ e per ogni $i \in 0, \dots, m_2 - 1$ fissato esiste un sottointervallo $[s'_i, s''_i] \subseteq [0, 1]$ tale che $\sigma(t) \in \mathcal{K}_i$ e $\phi_\mu(\sigma(t)) \in \mathcal{A}_Q^b$, $\forall t \in [s'_i, s''_i]$. Dato che

$$\mathcal{E}_0(\phi_\mu(\sigma(s'_i))) \leq l_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_0(\phi_\mu(\sigma(s''_i))) \geq l_2$$

esiste un sottointervallo $[s_i^*, s_i^{**}] \subseteq [s'_i, s''_i]$ tale che

$$\phi_\mu(\sigma(t)) \in \mathcal{R}_1, \quad \forall t \in [s_i^*, s_i^{**}]$$

e

$$\phi_\mu(\sigma(s_i^*)) \in \mathcal{R}_{1,s}^-, \quad \phi_\mu(\sigma(s_i^{**})) \in \mathcal{R}_{1,d}^-.$$

Questo dimostra la proprietà (3.29).

Le proprietà (3.26) e (3.29) valgono contemporaneamente e permettono di applicare il Lemma 55 da cui segue la tesi. \square

Capitolo 4

Conclusioni

Capita di frequente nell'osservazione naturale, tipica di scienze ecologiche e biologiche, di rilevare comportamenti e dinamiche che rendono i fenomeni osservati apparentemente inspiegabili. Ad esempio può accadere che tentando di distruggere con dell'insetticida una specie parassita di una certa coltivazione si rilevi, invece, a lungo termine, un aumento degli esemplari di quella specie. L'analisi di Volterra ci permette di spiegare cosa sia successo: tentando di distruggere una specie si è distrutta uniformemente un'altra specie di insetti «predatori». Il risultato è un aumento del valore medio di popolazione della prima specie di insetti («prede»). Non è per caso, dunque, che i periodi di pesca e caccia così come l'uso di pesticidi e diserbanti devono essere controllati a monte, in una società moderna, da un organo superpartes. Oltre ad evitare interventi disastrosi per gli ecosistemi (che nei nostri modelli corrispondono a quelle scelte delle costanti che rendono il modello banale), questi organi devono valutare lo specifico intervento (caccia, pesca, disinfestazione) confrontandolo con la natura del sistema in cui esso dovrebbe essere attuato ed i suoi equilibri. Questa tesi vuole sottolineare che il modello originale di Volterra-Lotka, a lungo e fortemente criticato dagli esperti dei settori ecologici e biologici, può essere, in realtà, fortemente specializzato e adattato a descrivere ambienti estremamente sofisticati. Le possibilità nascoste nelle due semplici equazioni del modello possono essere svelate confrontando opportunamente il modello alle esigenze di studio e all'osservazione empirica.

L'introduzione nel modello di alternanza di stagioni di intervento e stagioni di non-intervento mette in luce una dinamica ricca e di natura fortemente caotica. Si potrebbe affermare, da un lato, che i fenomeni naturali riservano sempre sfumature inaspettate ed estremamente complesse, dall'altro si può prevedere che in futuro l'intervento della matematica, nelle sue accezioni più teoriche o in quelle più applicate, nello studio dell'interazione dell'uomo con

il nostro pianeta dovrà essere approfondita e sempre tenuta in gran conto. Stando al modello studiato in questi tesi, vi sono condizioni perchè certi fenomeni naturali apparentemente semplici presentino dinamiche estremamente complesse, nel senso che a partire da condizioni iniziali lievemente perturbate la prevedibilità degli svolgimenti futuri o la deducibilità della storia passata sono annichilite dietro un orizzonte di incertezza tipico di tutte le dinamiche caotiche che abbiamo potuto studiare nell'ultimo secolo.

Bibliografia

- [1] Marina Pireddu, Fabio Zanolin (28 Maggio 2008), *Chaotic dynamics in the Volterra Predator-Prey Model via linked twist maps*
<http://arxiv.org/abs/0805.4367>.
- [2] Andrea Milani Comparetti (2002), *Introduzione ai sistemi dinamici*, Edizioni Plus - Università di Pisa.
- [3] Andrea Carati, Luigi Galgani, *Appunti di Meccanica Razionale II*, Università degli Studi di Milano, <http://www.mat.unimi.it/users/galgani/>.
- [4] M. W. Hirsch, S. Smale (1974), *Differential equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, ACADEMIC PRESS.
- [5] R. L. Devaney (1978), *Subshifts of finite type in linked twist mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 71, 334-338.
- [6] J. Moser (1973), *Stable and random motions in dynamical systems*, Ann. of Math. Studies, N. 77, Princeton Univ. Press.
- [7] P. Hartmann (1964), *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons.
- [8] John M. Franks (1977), *Constructing structurally stable diffeomorphisms*, Ann. of Math., Vol. 105, No.2.
- [9] R.F. Williams (1973), *Classification of subshifts of finite type*, Ann. of Math., Vol. 98, No.1.
- [10] J. Kennedy, J. A. Yorke (2001), *Topological Horseshoes*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 353, No. 6
- [11] T. Ding, F. Zanolin (1992), *Periodic Solutions and subharmonic solutions for a class of planar systems of Lotka-Volterra type*, World Congr. of Nonlin. Anal. '92 Vol. I-IV