Scienze biologiche molecolari
Matematica e statistica B - prove in itinere

Test di ingresso del 20 ottobre 2005

È vietato l'uso di calcolatrici tascabili

Esercizio 1a Disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$-\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}, \quad -0.7\overline{5}, \quad -0.5, \quad \sqrt{2}, \quad -\sqrt{3}, \quad \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 1b Sapendo che $0.5 < x < 0.9$ e $1.3 < y < 1.7$, si fornisca una limitazione per il numero $\frac{x}{y}$.

Esercizio 2a Scrivere la negazione dell'enunciato "c'è ancora qualcuno che crede agli oroscopi".

Esercizio 2b Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è multiplo di } 6\}$. L'affermazione "per ogni $x \in A$ esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $x = 2h$" è vera o falsa? Che cosa esprime?

Esercizio 3a Determinare il numero a, sapendo che

$$\frac{a}{a+b} = 4, \qquad a - b = 1.$$

Esercizio 3b Determinare il numero a, sapendo che se al doppio di a si aggiunge 5 e si moltiplica il risultato per 2, si ottiene il quadruplo della somma di a e del suo quinto.

Esercizio 4a Risolvere l'equazione $-x^2 + 6x + 7 = 0$.

Esercizio 4b Risolvere la disequazione $-x^2 + 6x + 7 > 0$.

Esercizio 5a Determinare un numero a tale che risulti $4^5 + 2^{10} = 2^a$.

Esercizio 5b Determinare un numero a tale che risulti

$$\frac{1}{3^3\sqrt{3\sqrt{3}}} = 3^a.$$

Esercizio 6a Determinare un numero positivo a tale che risulti

$$\log_3 4 - \log_3 7 = \log_3 a.$$

Esercizio 6b Risolvere l'equazione

$$\log_9 x - \log_9(x+6) = -\frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 7a Risolvere l'equazione $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Esercizio 7b Risolvere la disequazione $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 8a Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(0, 0)$ e parallela alla retta di equazione $4x + y = 10$.
Esercizio 8b Disegnare, tratteggiandola, la regione del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ individuata dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 4x + y \geq 10 \\ -1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Compitino dell'11 novembre 2005

Esercizio 1 Risolvere le disequazioni seguenti:

(a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sqrt{3x+1}} \geq 7^{2-x}$,

(b) $\log_4 \left(\log_4 \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}\right) \geq 0$.

Esercizio 2 (a) Disegnare la regione E descritta dalle relazioni

$$y \leq 2^x + 1\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,, \quad y \geq -\frac{x}{2}\,.$$

(b) Calcolare le coordinate dei punti di E che hanno ordinata rispettivamente massima e minima.

Esercizio 3 È data una funzione $f(x)$ sulla quale sono noti i fatti seguenti:

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

$$\max f = f(1) = 2, \qquad \min f = f(4) = 0.$$

Dopo aver disegnato un grafico approssimativo di $f(x)$,

(a) tracciare un grafico approssimativo della funzione $g(x) = 2f(x - 1)$;

(b) tracciare un grafico approssimativo della funzione $h(x) = f(3x) + 1$.

Esercizio 4 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\ln(1 + x^2)}$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)(x + x^2)$.

Compitino del 5 dicembre 2005

Esercizio 1 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \log_3(2^x + \sin x)$,

(b) $g(x) = 3^x(\sqrt{x} + \cos x)$,

(c) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \tan x$.

Esercizio 2 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x^2+1)}{\ln x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (3^x - x^3)$.

Esercizio 3 Calcolare i seguenti integrali:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_1^9 \log_3 x\, dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

Esercizio 4 Fra tutti i trapezi isosceli che sono inscritti nella semicirconferenza di raggio 2 e che hanno le basi parallele al diametro, determinare quello di area massima, e il valore di tale area.

Compitino del 9 gennaio 2006

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{6-2x}{x+1}\, e^{x+|x|}$.
Determinarne l'insieme di definizione, stabilirne il segno, trovarne gli eventuali asintoti, individuarne gli intervalli di monotonia, e infine tracciarne un grafico approssimativo.

Esercizio 2 Un individuo dispone di cinque urne, numerate da 1 a 5, e di cento palline identiche. Egli decide di riempire a caso le urne con le palline assegnate.
(a) Si descriva un opportuno spazio probabilizzato da associare a questo esperimento aleatorio.
(b) Determinare la probabilità che la prima urna rimanga vuota.
(c) Determinare la probabilità che tutte le urne di indice pari rimangano vuote.

Esercizio 3 Un gioco consiste di due fasi. Dapprima si lancia una moneta equilibrata; poi, se esce testa si dovrà estrarre una pallina da un'urna che ne contiene dodici, numerate da 1 a 12, mentre se esce croce si dovrà estrarre una pallina da un'altra urna che ne contiene sei, numerate da 1 a 6. Chi partecipa al gioco vincerà un numero di euro corrispondente al numero presente sulla pallina estratta.
(a) Si descriva un opportuno spazio probabilizzato da associare a questo esperimento aleatorio.
(b) Determinare la probabilità che il giocatore vinca 6 euro.
(c) Determinare la probabilità che sia uscita testa, sapendo che il giocatore ha vinto 6 euro.

Esercizio 4 Nella stazione di Topolinia il giorno di san Pippo arrivano cento treni, dei quali il 10% sono eurostar, il 30% sono intercity, il 25% sono interregionali e il 35% sono regionali. I ritardi registrati all'arrivo dei treni, misurati in minuti, sono i seguenti:

	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
eurostar	40%	30%	20%	10%		
intercity	10%	50%	20%	15%	5%	
interreg.		20%	40%	20%	10%	10%
regionali			10%	40%	30%	20%

(a) Determinare la probabilità che un treno ritardi più di mezz'ora.
(b) Determinare la probabilità che un treno arrivato con un ritardo fra 30 e 40 minuti sia un eurostar.
(c) Calcolare il ritardo medio di un treno regionale.