Insiemi paralleli

Alessio Balestri

Relatore: Prof. Paolo Acquistapace

Indice

	Inti	roduzione	iii
1	Strumenti		1
	1.1	Nozioni di base	1
	1.2	Funzioni di Kneser	8
2	Volume e superficie di insiemi paralleli		
	2.1	Il volume di un r -parallelo	15
	2.2	Volume e superficie	19
3	Studio asintotico		25
	3.1	S-volume ed M-volume	25
	3.2	Due esempi	28
	3.3	S-dimensione ed M-dimensione	32
Bi	Bibliografia		

Introduzione

Per r > 0, l'r-parallelo di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme dei punti che distano al più r da A. Per $r \to 0^+$, l'r-parallelo A_r di A tende alla chiusura di A, nel senso che $\overline{A} = \bigcap_{r>0} A_r$. Lo studio delle relazioni fra il volume n-dimensionale di A_r e l'area superficiale (n-1)-dimensionale di ∂A_r sono stati oggetto di molte investigazioni, a partire da quelle pionieristiche di Kneser [5], motivate dalle svariate applicazioni degli insiemi paralleli nell'ambito della geometria frattale.

La nozione di volume di Minkowski si è rivelata uno strumento assai utile nelle applicazioni, sia per lo studio di altre quantità geometriche che hanno portato alla definizione di "curvatura frattale", sia per l'approssimazione di traiettorie molto irregolari del moto Browniano, sia infine per la teoria delle cosiddette "stringhe frattali" sviluppate nella monografia [6].

Questa tesi è dedicata alla descrizione dei legami fra il volume n-dimensionale $V_A(r) = H^n(A_r)$ e l'area (n-1)-dimensionale $S_A(r) = H^{n-1}(\partial A_r)$, ove H^s , $0 \le s \le n$, è la misura di Hausdorff. Le proprietà di queste funzioni sono state studiate da Kneser [5] e da Stachó [8], e successivamente migliorate da Rataj-Winter [7]. Si considerano gli insiemi

$$A_r = \{ x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) \le r \}, \quad A_{\le r} = \{ x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) < r \}$$

e si analizzano le caratteristiche delle funzioni $V_A(r)$ e $S_A(r)$. Di quali proprietà godono? Sono continue? Sono derivabili? Sono legate fra loro?

Per procedere è utile studiare certe funzioni $f: I \subseteq (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dette funzioni di Kneser, caratterizzate dalla proprietà di soddisfare, per un n intero positivo fissato, per ogni $\lambda > 1$ e per $a, b \in I$, con $a \leq b$, la relazione

$$f(\lambda b) - f(\lambda a) \le \lambda^n (f(b) - f(a)).$$

Vengono evidenziate le somiglianze che hanno le funzioni di Kneser con le funzioni concave; molte delle proprietà di queste ultime possono essere estese alle funzioni di Kneser.

A questo punto un risultato di raccordo ci viene in aiuto: si dimostra che $V_A(r)$ è una funzione di Kneser e siamo dunque in grado di provare per la

funzione $V_A(r)$ l'assoluta continuità, l'esistenza q.o. delle derivate destre e sinistre, la loro uguaglianza per q.o. r ed altre proprietà.

Ci avviciniamo al nostro obiettivo dimostrando che:

$$M^{n-1}(\partial A_{< r}) = \frac{(V_A)'_{-}(r) + (V_A)'_{+}(r)}{2}$$

dove $M^{n-1}(\partial A_{< r})$ è il volume di Minkowski (
oM-volume) (n-1)-dimensionale del bordo di
 $A_{< r}.$

Un ultimo passo ci permette di "trasformare" il volume di Minkowski nella misura di Hausdorff, e di ottenere, con qualche aggiustamento, un risultato importante: si ha $V'_A(r) = S_A(r)$ per ogni r > 0 eccetto che per un insieme numerabile di valori.

Nell'ultima parte della tesi si studia il comportamento asintotico per $r \to 0^+$ di volume ed area. Per prima cosa si introduce l'S-volume: un oggetto definito in maniera analoga all'M-volume, parlando di S-volume inferiore \underline{S} e superiore \overline{S} come si era parlato di M-volume inferiore \underline{M} e superiore \overline{M} .

Si dimostra che, per un compatto $A\subseteq\mathbb{R}^n$ di misura nulla, si ha per tutti gli $s\leq n$

$$\underline{S}^{s}(A) \leq \underline{M}^{s}(A) \leq \overline{M}^{s}(A) \leq \overline{S}^{s}(A).$$

Queste diseguaglianze possono essere strette: sono forniti come controesempi l'insieme di Cantor ed il triangolo di Sierpinski.

Gli ultimi risultati riguardano le M-dimensioni ed S-dimensioni collegate ai rispettivi volumi. Si prova che, per un compatto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ di misura nulla, si ha $\overline{\dim}_M(A) = \overline{\dim}_S(A)$, mentre in generale vale solo la diseguaglianza (\geq).

Per le dimensioni inferiori invece l'unica proprietà che si riesce a stabilire è che $\underline{\dim}_M(A) \ge \underline{\dim}_S(A) \ge \frac{n-1}{n}\underline{\dim}_M(A)$.

Capitolo 1

Strumenti

1.1 Nozioni di base

Richiamiamo alcuni fatti noti per fissare un punto di punto di partenza e per metterci d'accordo sulla notazione.

Definizione 1.1 (diametro di E). Fissato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce

$$\operatorname{diam} E := \begin{cases} 0 & \operatorname{se} E = \emptyset \\ \sup\{|x-y|: x,y \in E\} & \operatorname{se} E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definizione 1.2 (misura di Hausdorff). Fissati $E\subseteq\mathbb{R}^n,\ s\in\delta>0$ si definiscono

$$H^s_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_i)^s : E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \quad U_i \operatorname{aperti}, \quad \operatorname{diam} U_i < \delta \right\}$$

e

$$H^s(E) := \lim_{\delta \to 0^+} H^s_{\delta}(E) = \sup_{\delta > 0} H^s_{\delta}(E).$$

Definita la misura, tiriamo in ballo anche la dimensione di Hausdorff.

Definizione 1.3 (dimensione di Hausdorff). Fissato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce

$$\dim_H(E) := \inf\{s | H^s(E) = 0\} = \sup\{s | H^s(E) = \infty\}.$$

Naturalmente la dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è un numero compreso fra 0 ed n, estremi inclusi.

Richiamiamo inoltre i seguenti fatti:

1. la misura di Hausdorff è in effetti una misura esterna σ -additiva;

2. i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n misurabili secondo Lebesgue sono misurabili anche secondo Hausdorff e le misure coincidono a meno di una costante moltiplicativa.

Uno dei concetti di cui ci serviremo è quello di funzione assolutamente continua.

Definizione 1.4 (funzione assolutamente continua). Una funzione $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è detta assolutamente continua in [a,b] se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $]\alpha_i, \beta_i[, i=1,\ldots,k$ contenuti in [a,b] e che verificano $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulta $\sum_{i=1}^k |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$. In tal caso scriveremo $f \in AC[a,b]$.

Prima di passare al teorema più importante che ci interessa, vogliamo mettere in luce due proprietà delle funzioni assolutamente continue:

- 1. se f è assolutamente continua, la condizione richiesta dalla definizione è soddisfatta anche per famiglie infinite di intervalli;
- 2. se f è assolutamente continua, allora è continua, ma non è vero il viceversa.

Teorema 1.1. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, sono fatti equivalenti:

- 1. $f \in AC[a, b]$;
- 2. f è derivabile q.o. in [a, b], f' è sommabile in [a, b] e

$$f(x) - f(a) = \int_{a}^{x} f'(t)dt \qquad \forall x \in [a, b].$$

Richiamiamo una proprietà delle funzioni concave (e convesse) che ci servirà.

Proposizione 1.1. Sia $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione concava. Allora f è localmente lipschitziana.

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in I$, esiste un intorno $B(x_0, r)$ dove f è limitata. Sia $\delta > 0$ tale che $B(x_0, 2\delta) \subseteq B(x_0, r)$, vogliamo far vedere che in $B(x_0, \delta)$ f è lipschitziana.

Per ipotesi, $N_0 = \sup_{B(x_0,2\delta)} |f| < \infty$. Se $x_1, x_2 \in B(x_0,\delta)$, poniamo d = |x-y| e $x_3 = x_2 + \frac{\delta}{d}(x_2 - x_1)$. Allora $x_3 \in B(x_0,2\delta)$ e $x_2 = \frac{\delta}{d+\delta}x_1 + \frac{d}{d+\delta}x_3$; quindi per concavità deduciamo

$$f(x_2) \ge \frac{\delta}{d+\delta} f(x_1) + \frac{d}{d+\delta} f(x_3),$$

da cui, sottraendo $\frac{\delta}{d+\delta}f(x_2)$ da entrambe le parti,

$$\frac{\delta}{d+\delta}(f(x_1) - f(x_2)) \le \frac{d}{d+\delta}(f(x_2) - f(x_3)).$$

Ne discende

$$f(x_1) - f(x_2) \le \frac{d}{\delta} |f(x_2) - f(x_3)| \le \frac{2N_0}{\delta} |x_1 - x_2|,$$

e pertanto si conclude che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{2N_0}{\delta} |x_1 - x_2|.$$

Enunciamo di seguito un teorema che ci fornisce una proprietà fondamentale delle funzioni localmente lipschtziane.

Teorema 1.2 (Teorema di Rademacher). Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione localmente lipschitziana. Allora f è differenziabile q.o.

Ci interessa anche dimostrare la disuguaglianza di Brunn-Minkowski ed un altro paio di disuguaglianze che seguono come corollario.

Teorema 1.3 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski). Siano $A, B \in M_n$, non vuoti. Allora

$$m_n(A+B)^{1/n} \ge m_n(A)^{1/n} + m_n(B)^{1/n}.$$
 (1.1)

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in vari passaggi: dimostreremo la tesi per A e B appartenenti ad insiemi ad hoc e poi, sfruttando le proprietà approssimanti della misura con compatti e aperti, all'insieme M_n .

Sia
$$F = \{E = \prod_{j=1}^n I_j \text{ con } I_j \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalli aperti } \}.$$

Sia $F = \{E = \prod_{j=1}^{n} I_j \text{ con } I_j \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalli aperti } \}.$ Supponiamo dapprima $A, B \in F$: se $A = \prod_{j=1}^{n} P_j$ e $B = \prod_{j=1}^{n} Q_j$, si verifica in modo immediato che risulta

$$A + B = \prod_{j=1}^{n} (P_j + Q_j).$$

Posti
$$u_j = \frac{m_1(P_j)}{m_1(P_j + Q_j)}, v_j = \frac{m_1(Q_j)}{m_1(P_j + Q_j)}, j = 1, \dots, n_j$$

Posti $u_j = \frac{m_1(P_j)}{m_1(P_j + Q_j)}$, $v_j = \frac{m_1(Q_j)}{m_1(P_j + Q_j)}$, $j = 1, \ldots, n$, si ha $u_j + v_j = 1$ e, per la nota disuguaglianza fra media geometrica e aritmetica,

$$\frac{m_n(A)^{1/n} + m_n(B)^{1/n}}{m_n(A+B)^{1/n}} = \left[\prod_{j=1}^n u_j\right]^{\frac{1}{n}} + \left[\prod_{j=1}^n v_j\right]^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j = 1.$$

Ciò prova la tesi per $A, B \in F$.

Siano ora A, B della forma $A = \bigcup_{i=1}^p G_i, B = \bigcup_{j=1}^q H_j,$ con $G_i, H_j \in F$. Si ha

$$A + B = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} (G_i + H_j).$$

Proviamo la tesi per induzione su $p + q \ge 2$.

Se p+q=2 sappiamo già che la tesi è vera, perché in questo caso p=q=1.

Sia ora p+q>2 e supponiamo senza perdita di generalità che p>1. Scegliamo $i\in\{1,\ldots,n\}$ ed $a\in\mathbb{R}$ tali che l'iperpiano $\{x_i=a\}$ separi G_1 da G_2 : sarà quindi

$$G_1 \subseteq A_1 = A \cap \{x_i < a\}, \quad G_2 \subseteq A_2 = A \cap \{x_i > a\}$$

o viceversa.

Sia ora $b \in \mathbb{R}$ tale che, posti $B_1 = B \cap \{x_i < b\}, B_2 = B \cap \{x_i > b\}$, risulti precisamente

$$m_n(B_1) = \frac{m_n(B)}{m_n(A)} m_n(A_1), \quad m_n(B_2) = \frac{m_n(B)}{m_n(A)} m_n(A_2).$$

Osserviamo che, sfruttando la continuità, è possibile scegliere prima B_1 e successivamente porre $B_2 = B \setminus B_1$.

Adesso per k = 1, 2 considero gli indici $i_1^k \dots i_{r_k}^k$ tali che $G_{i_h^k} \cap A_k \neq \emptyset$, $h = 1, \dots, r_k, k = 1, 2$; analogamente considero gli indici $j_1^k \dots j_{s_k}^k$ tali che $H_{j_h^k} \cap B_k \neq \emptyset$, $h = 1, \dots, s_k, k = 1, 2$.

Notiamo che $r_k < p$ per costruzione, mentre $s_k \le q$, quindi $r_k + s_k e pertanto si può usare l'ipotesi induttiva applicata a$

$$A_k = \bigcup_{h=1}^{r_k} (G_{i_h^k} \cap A_k)$$
 e $B_k = \bigcup_{h=1}^{s_k} (H_{i_h^k} \cap B_k)$ $k = 1, 2,$

che sono unioni finite di elementi di F.

Notiamo che $A_1 + B_1$ e $A_2 + B_2$ verificano $(A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2) \subseteq A + B$, e sono separati dall'iperpiano $\{x_i = a + b\}$.

5

Allora

$$m_{n}(A+B) \geq m_{n}(A_{1}+B_{1}) + m_{n}(A_{2}+B_{2}) \geq$$

$$\geq \left[m_{n}(A_{1})^{\frac{1}{n}} + m_{n}(B_{1})^{\frac{1}{n}}\right]^{n} + \left[m_{n}(A_{2})^{\frac{1}{n}} + m_{n}(B_{2})^{\frac{1}{n}}\right]^{n} =$$

$$= \left[m_{n}(A_{1})^{\frac{1}{n}} \left(1 + \left(\frac{m_{n}(B)}{m_{n}(A)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{n} + \left[m_{n}(A_{2})^{\frac{1}{n}} \left(1 + \left(\frac{m_{n}(B)}{m_{n}(A)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{n} =$$

$$= \left(1 + \left(\frac{m_{n}(B)}{m_{n}(A)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n} (m_{n}(A_{1}) + m_{n}(A_{2}))^{n} =$$

$$= \left[m_{n}(A)^{1/n} + m_{n}(B)^{1/n}\right]^{n}$$

Ciò prova il passo induttivo e quindi la tesi è provata quando A e B sono unioni finite di rettangoli aperti disgiunti.

Ne discende che la tesi vale quando A e B sono unioni finite di rettangoli disgiunti chiusi, ossia plurirettangoli.

Poiché aperti e compatti sono ben approssimati in misura da plurirettangoli, la tesi vale quando A e B sono aperti oppure compatti.

Infine, poiché ogni misurabile è ben approssimato in misura da aperti, segue la tesi per $A, B \in M_n$.

Osservazione 1.1. Scrivendo m_n^* in luogo di m_n si generalizza la diseguaglianza (1.1) ad ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n$, limitato, e $x \in \mathbb{R}^n$ ricordiamo che la distanza di x da A è definita come

$$d_A(x) = d(x, A) := \inf\{|x - y| : y \in A\}$$
 (1.2)

Corollario 1.1. Se $r \in (0, \infty)$ e $S \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m_n(\overline{S}) < \infty$, allora

(i)
$$\frac{1}{r}m_n(\{x: 0 < d_S(x) < r\}) \ge nk_n^{1/n}m_n(\overline{S})^{1-\frac{1}{n}};$$

(ii)
$$\frac{1}{r}m_n(\{x: 0 < d_{S^c}(x) < r\}) \ge nk_n^{1/n}m_n(\{x: d_{S^c}(x) \ge r\})^{1-\frac{1}{n}};$$

$$con k_n = m_n(B(0,1)).$$

Dimostrazione. Se $m_n(\overline{S}) = 0$ la tesi è ovvia, supponiamo quindi $m_n(\overline{S}) > 0$. Scriviamo $\{x : 0 < d_S(x) < r\} = \overline{S} + B(0, r)$, da cui

$$m_{n}(\{x: 0 < d_{S}(x) < r\}) \underbrace{\geq}_{(1.1)} \left[m_{n}(\overline{S})^{\frac{1}{n}} + m_{n}(B(0, r))^{\frac{1}{n}} \right]^{n}$$

$$= \left[m_{n}(\overline{S})^{\frac{1}{n}} + k_{n}^{\frac{1}{n}} r \right]^{n} = m_{n}(\overline{S}) \left[1 + \frac{k_{n}^{\frac{1}{n}} r}{m_{n}(\overline{S})^{\frac{1}{n}}} \right]^{n}$$

$$\underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} m_{n}(\overline{S}) \left[1 + \frac{nk_{n}^{\frac{1}{n}} r}{m_{n}(\overline{S})^{\frac{1}{n}}} \right] = m_{n}(\overline{S}) + m_{n}(\overline{S})^{1 - \frac{1}{n}} nk_{n}^{\frac{1}{n}} r.$$

Similarmente, posto $T_r = \{x : d_{S^c}(x) \ge r\}$, si ha $\mathring{S} \supseteq T_r + B(0,r)$, da cui, per quanto visto sopra

$$m_n(\mathring{S}) \ge m_n(T_r) + m_n(T_r)^{1-\frac{1}{n}} n k_n^{\frac{1}{n}} r.$$

In conclusione si ha

$$m_n(\{x: 0 < d_S(x) < r\}) \ge m_n(\overline{S}) + m_n(\overline{S})^{1 - \frac{1}{n}} n k_n^{\frac{1}{n}} r \ge m_n(\overline{S})^{1 - \frac{1}{n}} n k_n^{\frac{1}{n}} r,$$
da cui (i); poi,

$$m_n(\{x: 0 < d_{S^c}(x) < r\}) = m_n(\mathring{S} \setminus T_r) = m_n(\mathring{S}) - m_n(T_r) \ge m_n(\overline{S})^{1 - \frac{1}{n}} n k_n^{\frac{1}{n}} r,$$
da cui (ii).

A questo punto, possiamo dare la definizione di insieme parallelo.

Definizione 1.5 (insieme parallelo). Fissati $A \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e r > 0, si definisce r-parallelo di A

$$A_r := \{ x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) \le r \}.$$

Quando si parla di insieme parallelo si può intendere anche il seguente insieme:

$$A_{< r} := \{ x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) < r \},$$

il quale, naturalmente, non è altro che la parte interna del vero r-parallelo per come si è definito.

Questi insiemi hanno alcune proprietà da evidenziare:

- 7
- 1. A_r è compatto, in quanto chiuso e limitato, giacché A è limitato;
- 2. $A_{\leq r}$ è aperto e limitato;
- 3. $A_r \to A$ insiemisticamente, ossia

$$\overline{A} = \bigcap_{r>0} A_r;$$

4. definendo $V_A(r) := H^n(A_r)$, si ha che

$$\lim_{r \to 0^+} V_A(r) = V_A(0) = H^n(A);$$

5. analogamente definendo $S_A(r) := H^{n-1}(\partial A_r)$, si ha che

$$\lim_{r \to 0^+} S_A(r) = S_A(0) = H^{n-1}(\partial A).$$

Sfruttando gli insiemi paralleli si può definire una certa quantità, il volume di Minkowski, al quale è legata la dimensione di Minkowski.

Definizione 1.6 (M-volume). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $s \in [0, n]$, il volume s-dimensionale di Minkowski inferiore è definito da

$$\underline{M}^{s}(A) := \liminf_{r \to 0} \frac{V_{A}(r)}{k_{n-s}r^{n-s}}$$

mentre quello superiore da

$$\overline{M}^s(A) := \limsup_{r \to 0} \frac{V_A(r)}{k_{n-s}r^{n-s}},$$

con $k_t = \pi^{t/2}/\Gamma(1+\frac{t}{2})$. (Se t è intero, k_t non è altro che il volume della palla unitaria t-dimensionale).

Se $\underline{M}^s(A) = \overline{M}^s(A)$ il valore comune $M^s(A)$ è il volume s-dimensionale di Minkowski di A.

Definizione 1.7 (M-dimensione). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, si definisce dimensione di Minkowski inferiore il valore

$$\underline{\dim}_{M}(E) := \inf\{0 \le s \le n | \underline{M}^{s}(E) = 0\} = \sup\{0 \le s \le n | \underline{M}^{s}(E) = \infty\}$$

e dimensione di Minkowski superiore il valore

$$\overline{\dim}_M(E) := \inf\{0 \le s \le n | \overline{M}^s(E) = 0\} = \sup\{0 \le s \le n | \overline{M}^s(E) = \infty\}.$$

Qualora valesse l'uguaglianza, il comune valore $\dim_M(E)$ è detto M-dimensione di E.

Vogliamo dedurre proprietà del volume di A dallo studio del volume di A_r ; per raggiungere questo obiettivo bisogna prima fare una digressione studiando certe particolari funzioni, dette di Kneser.

1.2 Funzioni di Kneser

Definizione 1.8 (funzione di Kneser). Una funzione $f: I \subseteq (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di Kneser se esiste un intero positivo n tale che per ogni $a, b \in I$, con $a \leq b$, e per $\lambda \geq 1$ si ha

$$f(\lambda b) - f(\lambda a) \le \lambda^n (f(b) - f(a)). \tag{1.3}$$

Per esempio, su \mathbb{R} tutte le funzioni concave in un intervallo $I \subseteq (0, +\infty)$ sono di Kneser con n = 1, in quanto presi $a < \lambda a < b < \lambda b$ vale

$$\frac{f(\lambda b) - f(\lambda a)}{\lambda b - \lambda a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

da cui, raccogliendo λ e semplificando b-a, si ha la proprietà richiesta. Se $a < b < \lambda a < \lambda b$ questo fatto è vero a maggior ragione, con la stessa argomentazione.

In un certo senso vale anche il viceversa, come dice il seguente lemma:

Lemma 1.1. Sia f una funzione di Kneser su I e siano $a, b \in I$ con a < b, e $f(a) \ge f(b)$; allora la restrizione di f all'intervallo $[b, +\infty) \cap I$ è concava e monotona decrescente.

Dimostrazione. Siano $\lambda > 1$, $x_0 \in I$ e $x_k = \lambda^k x_0$ per k = 1, 2, ...

Esaminiamo il comportamento della f ristretta alla sequenza $\{x_i\} \cap I$. Posto

$$\gamma_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

per la (1.3) abbiamo $\gamma_{k+1} \leq \lambda^{n-1} \gamma_k$; in particolare se vale $f(x_i) \leq f(x_{i-1})$ per qualche i allora

$$0 \ge \gamma_i \ge \gamma_{i+1} \ge \gamma_{i+2} \ge \dots$$

e questo significa proprio che la funzione f è monotona decrescente e concava sulla successione $\{x_i\} \cap I$.

L'idea della dimostrazione è di dividere l'intervallo [a,b] in 2^m parti proporzionali, con $m \in \mathbb{N}$, e valutare la funzione f sulla successione di punti così generata. Per far questo prendiamo $x_0 = a$ e $\lambda = (b/a)^{2^{-m}}$ con $m \in \mathbb{N}$. Giacché $f(a) \geq f(b)$, esiste almeno un indice i con $0 \leq i \leq 2^m$ per cui $f(x_i) \leq f(x_{i-1})$.

Con la notazione

$$Q_m = \left\{ a \left(\frac{b}{a} \right)^{2^{-m}k} : k \ge 0 \right\},\,$$

dunque

$$Q_m = \left\{ a, a \left(\frac{b}{a} \right)^{2^{-m}}, \dots, b, b \left(\frac{b}{a} \right)^{2^{-m}}, \dots \right\},\,$$

otteniamo che per ogni m la funzione $f\mid_{Q_m\cap[b,+\infty)}$ è monotona decrescente e concava.

Poiché $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$ e $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$ è denso dentro $[b, +\infty) \cap I$, abbiamo la tesi dalla continuità della f.

Osserviamo che, ovviamente, il limite puntuale di funzioni di Kneser è ancora una funzione di Kneser.

Inoltre la classe delle funzioni di Kneser costituisce un cono: è chiusa rispetto alla somma ed al prodotto per scalari positivi.

Adesso dimostriamo un lemma che ci aiuterà a scoprire importanti proprietà analitiche delle funzioni di Kneser.

Lemma 1.2. Sia g una funzione concava su I, allora:

- 1. g è assolutamente continua in ogni $[a, b] \subseteq I$;
- 2. g'_{\pm} esistono eccetto che per un insieme numerabile di punti, inoltre $g'_{+} \leq g'_{-}$ e $g'_{+} = g'_{-}$ quasi ovunque;
- 3. g'_{\pm} hanno limite destro e sinistro in ogni punto, diversi fra loro per al più un insieme numerabile di valori;
- 4. g'_{-} è continua a sinistra, g'_{+} è continua a destra.

Dimostrazione. 1. Essendo concava, g è derivabile q.o. per il teorema 1.2, in quanto localmente lipschitziana come provato nella proposizione 1.1. Inoltre g' è decrescente, quindi misurabile, nonché limitata in ogni $[a,b] \subset I$: infatti $g'(a) \geq g'(t) \geq g'(b)$.

Allora $g' \in L^{\infty}(a, b)$, quindi $g' \in L^{1}(a, b)$, e dunque $g \in AC[a, b]$.

2. Presi r < s < t, per la decrescenza dei rapporti incrementali esistono i limiti

$$\lim_{t\to s^+}\frac{g(t)-g(s)}{t-s}\quad \lim_{r\to s^-}\frac{g(s)-g(r)}{s-r},$$

con la seguente relazione di diseguaglianza

$$\lim_{t \to s^{+}} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} \le \lim_{r \to s^{-}} \frac{g(s) - g(r)}{s - r}.$$

3. Presi $t > s > \sigma > r$ abbiamo

$$\frac{g(t)-g(s)}{t-s} \leq \frac{g(t)-g(\sigma)}{t-\sigma} \leq \frac{g(s)-g(\sigma)}{s-\sigma} \leq \frac{g(s)-g(r)}{s-r} \leq \frac{g(\sigma)-g(r)}{\sigma-r},$$

quindi se $t \to s^+$ e $\sigma \to r^+$ otteniamo

$$g'_{-}(s) = \lim_{\sigma \to s^{-}} \frac{g(s) - g(\sigma)}{s - \sigma} \le \frac{g(s) - g(r)}{s - r} \le \lim_{\sigma \to r^{+}} \frac{g(\sigma) - g(r)}{\sigma - r} = g'_{+}(r).$$

4. Sia s > r. Per continuità

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(s) - f(r+h)}{s - r - h} \le \lim_{h \to 0^+} f'_+(r+h) = \lim_{\tau \to r^+} f'_+(\tau)$$

e per $s \to r^+$

$$f'_{+}(r) \le \lim_{\tau \to r^{+}} f'_{+}(\tau),$$

da cui la tesi.

Lemma 1.3. Sia f una funzione di Kneser su I, allora:

- 1. f è assolutamente continua in ogni $[a, b] \subseteq I$;
- 2. f'_{\pm} esistono eccetto che per un insieme numerabile di punti, inoltre $f'_{+} \leq f'_{-}$ e $f'_{+} = f'_{-}$ quasi ovunque;
- 3. f'_{\pm} hanno limite destro e sinistro in ogni punto, diversi fra loro per al più un insieme numerabile di valori;
- 4. f'_{-} è continua a sinistra, f'_{+} è continua a destra.

Dimostrazione. Siano a_0, b_0 due punti arbitrariamente scelti nel dominio di f, con $a_0 < b_0$.

Se riusciamo a provare che la funzione

$$g(t) = f(t) - t^n \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0^n - a_0^n}$$

è concava su $[b_0, +\infty) \cap I$ abbiamo la tesi: la funzione g, in quanto concava, per il lemma precedente soddisfa tutte le proprietà 1, 2, 3 e 4; poiché f differisce da g per un polinomio, anche f soddisfa 1, 2, 3 e 4.

Per dimostrare che g è concava osserviamo che $g(a_0) = g(b_0)$ e che g è a sua volta una funzione di Kneser. Il lemma 1.1 ci assicura che $g|_{[b_0,+\infty)}$ è concava.

L'arbitrarietà dei punti a_0, b_0 ci garantisce che le proprietà richieste valgono su tutto I.

Teorema 1.4. Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Kneser e $a \in I$, allora esiste una funzione α monotona decrescente tale che

$$f(t) = \int_{a}^{t} \tau^{n-1} \alpha(\tau) d\tau + f(a) \quad \forall t \in I.$$

Dimostrazione. Per il lemma 1.3 possiamo scrivere $f(t) - f(a) = \int_a^t f'_+(\tau) d\tau$. Pertanto l'unica cosa che dobbiamo provare è che la funzione $f'_+(t)t^{1-n}$ è monotona decrescente.

Siano $t \in I$, $\lambda \ge 1$ e h > 0. La (1.3) implica che

$$f(t+h) - f(t) \ge \lambda^{-n} [f(\lambda t + \lambda h) - f(\lambda t)]$$

da cui dividendo per h

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \ge \lambda^{-n+1} \frac{f(\lambda t + \lambda h) - f(\lambda t)}{\lambda h}$$

facendo il limite per $h \to 0^+$ abbiamo $f'_+(t) \ge \lambda^{1-n} f'_+(\lambda t)$ da cui $f'_+(t) t^{1-n} \ge (\lambda t)^{1-n} f'_+(\lambda t)$ e questo completa la dimostrazione.

Corollario 1.2. Per ogni funzione di Kneser f monotona crescente, $a+x, a+\lambda x, a+y, a+\lambda y \in \mathrm{dom} f$ con $a>0, \lambda\geq 1$ e $y\geq x\geq 0$ si ha

$$f(a + \lambda y) - f(a + \lambda x) \le \lambda^n [f(a + y) - f(a + x)]$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.4 abbiamo

$$f(a+y) - f(a+x) = \int_{a+x}^{a+y} \tau^{n-1} \alpha(\tau) d\tau = \int_{0}^{1} [\tau_1(\sigma)]^{n-1} \alpha_1(\sigma) (y-x) d\sigma$$

dove $\tau_1(\sigma) = \sigma(a+y) + (1-\sigma)(a+x)$ e $\alpha_1(\sigma) = \alpha(\tau_1(\sigma))$. Similarmente

$$f(a+\lambda y) - f(a+\lambda x) = \int_0^1 [\tau_2(\sigma)]^{n-1} \alpha_2(\sigma) \lambda(y-x) d\sigma$$

dove
$$\tau_2(\sigma) = \sigma(a + \lambda y) + (1 - \sigma)(a + \lambda x)$$
 e $\alpha_2(\sigma) = \alpha(\tau_2(\sigma))$

Dato che $a, x, y \geq 0$, $\lambda \geq 1$, abbiamo $\tau_2(\sigma) \geq \tau_1(\sigma)$ se $\sigma \in [0, 1]$. Ma sappiamo anche che $\lambda \tau_2 \geq 0$ e che, sempre per l'ipotesi $a \geq 0$, anche $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$; di conseguenza poiché $\tau_1(\sigma) \leq \tau_2(\sigma) \leq \lambda \tau_1(\sigma)$ si ha $\alpha_1(\sigma) \geq \alpha_2(\sigma)$ e quindi

$$\lambda^{n-1}\tau_1(\sigma)^{n-1}\alpha_1(\sigma) \ge \tau_2(\sigma)\alpha_2(\sigma)$$

da cui

$$\lambda^n \tau_1(\sigma)^{n-1} \alpha_1(\sigma)(y-x) \ge \tau_2(\sigma)^{n-1} \alpha_2(\sigma) \lambda(y-x)$$

per tutti i $\sigma \in [0, 1]$, e dunque abbiamo la tesi.

Lemma 1.4. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni di Kneser definite su un intervallo I tali che $f_k(t) \to f_0(t)$ puntualmente su I. Allora se $t \in I$ ed esistono $(f_0)'_{\pm}(t), (f_k)'_{\pm}(t)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$(f_0)'_-(t) \ge \limsup_{k \to \infty} (f_k)'_-(t) \ge \liminf_{k \to \infty} (f_k)'_+(t) \ge (f_0)'_+(t)$$
 (1.4)

Dimostrazione. Sia $J = \{t \in I : \exists (f_0)'_{\pm}(t), \exists (f_k)'_{\pm}(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$

Proviamo la diseguaglianza di sinistra.

Supponiamo che esista $t_0 \in J$ tale che, per un $\epsilon_0 > 0$,

$$(f_0)'_-(t_0) \le \limsup_{k \to \infty} (f_k)'_-(t_0) - \epsilon_0.$$

Scegliamo $\{k_n\} \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$(f_0)'_-(t_0) \le (f_{k_n})'_-(t_0) - \frac{\epsilon_0}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$. Poiché $(f_0)'_-(\tau)$ è continua a sinistra esiste $\delta_{\epsilon} > 0$ tale che

$$|(f_0)'_{-}(\tau) - (f_0)'_{-}(t_0)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \tau \in [t_0 - \delta_{\epsilon}, t_0] \cap J.$$

Allora per il teorema 1.4, osservando che se le $\alpha_{k_n}(\tau)$ sono continue a sinistra allora lo sono anche moltiplicate per τ^{n-1} , si ha per $\tau \in [t_0 - \delta_{\epsilon}, t_0] \cap J$

$$(f_{k_n})'_{-}(\tau) = \tau^{n-1}\alpha_{k_n}(\tau) \ge t_0^{n-1}\alpha_{k_n}(t_0) - \frac{\epsilon}{2} = (f_{k_n})'_{-}(t_0) - \frac{\epsilon}{2} \ge$$
$$\frac{\epsilon_0}{2} - \frac{\epsilon}{2} + (f_0)'_{-}(t_0) \ge \frac{\epsilon_0}{2} - \epsilon + (f_0)'_{-}(\tau),$$

per cui, integrando su $[t_0 - \delta_{\epsilon}, t_0]$,

$$[f_{k_n}(t_0) - f_0(t_0)] - [f_{k_n}(t_0 - \delta_{\epsilon}) - f_0(t_0 - \delta_{\epsilon})] =$$

$$\int_{t_0 - \delta_{\epsilon}}^{t_0} [(f_{k_n})'_{-}(\tau) - (f_0)'_{-}(\tau)]d\tau \ge$$

$$\left(\frac{\epsilon_0}{2} - \epsilon\right) \delta_{\epsilon},$$

e questo è assurdo perché il primo membro tende a 0 per $n \to \infty$.

La disuguaglianza centrale in (1.4) è banale, mentre quella a destra è analoga.

Lemma 1.5. Sia $\{\alpha_n\}$ una successione di funzioni definite su un intervallo I, decrescenti e continue a sinistra. Se esistono $a,b \in I$ tali che $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(a)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(b)$ convergono, allora $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)$ converge per ogni $t \in [a,b]$ e la funzione $\beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)$ è decrescente e continua a sinistra in [a,b].

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e sia $\nu_{\epsilon} \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \le \sum_{n=\nu_{\epsilon}}^{\infty} [\alpha_n(a) - \alpha_n(b)] < \epsilon.$$

Sia $m > \nu_{\epsilon}$ e siano $s, t \in [a, b]$ con s < t. Allora

$$0 \le \sum_{n=1}^{m} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\nu_{\epsilon}} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)] + \sum_{n=\nu_{\epsilon}+1}^{m} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)] \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\nu_{\epsilon}} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)] + \sum_{n=\nu_{\epsilon}+1}^{m} [\alpha_n(a) - \alpha_n(b)] <$$

$$< \sum_{n=1}^{\nu_{\epsilon}} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)] + \epsilon$$

Per $m \to \infty$ otteniamo che la serie (a termini positivi) $\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)]$ converge.

Scelto allora t = b, otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(s) - \alpha_n(b)] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(b)$$

è convergente perché somma di serie convergenti, e quindi $\beta(s)$ è ben definita in [a,b].

Inoltre

$$0 \le \beta(s) - \beta(t) \le \sum_{n=1}^{\nu_{\epsilon}} [\alpha_n(s) - \alpha_n(t)] + \epsilon,$$

in particolare β è decrescente, e dunque

$$0 \le \lim_{s \to t^{-}} \beta(s) - \beta(t) \le \epsilon \quad \forall \epsilon > 0;$$

per l'arbitrarietà di ϵ quanto detto si traduce in

$$\lim_{s \to t^{-}} \beta(s) = \beta(t),$$

ovvero β è continua a sinistra.

Lemma 1.6. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni di Kneser definite su un intervallo I tali che $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ converga puntualmente in I. Allora, posto $f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, si ha

$$(f_0)'_+(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_+(t)$$
 e $(f_0)'_-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_-(t)$

per tutti i punti t interni di I.

Dimostrazione. Posto $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$, la successione $\{g_n\}$ verifica le ipotesi del lemma 1.4, quindi esiste un insieme $E \subseteq I$, il cui complementare in I ha misura nulla, tale che

$$(f_0)'_-(t) \ge \limsup_{k \to \infty} (g_k)'_-(t) \ge \liminf_{k \to \infty} (g_k)'_+(t) \ge (f_0)'_+(t) \quad \forall t \in E.$$

D'altra parte, dato che f_0 è una funzione di Kneser, si ha, per il lemma 1.3, l'esistenza di $(f_0)'(t)$ per q.o. $t \in I$.

Quindi $\exists F \subseteq E$, con $m(I \setminus F) = 0$, in particolare l'insieme F è denso in I, tale che

$$(f_0)'_-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_+(t) = (f_0)'_+(t) \quad \forall t \in F.$$

Siano $a, b \in F$, con a < b.

Posto $\alpha_k(t) = t^{1-n}(f_k)'_+(t)$, le funzioni α_k sono decrescenti e continue a sinistra per il teorema 1.4, e le serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(a)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(b)$ sono convergenti perché $a, b \in F$.

Per il lemma 1.5 si ha che $\beta(t) := t^{1-n} \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_-(t)$ converge in [a, b]. e per lo stesso motivo, $\gamma(t) := t^{1-n} \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_+(t)$ converge in [a, b].

Dunque vale

$$(f_0)'_-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_-(t)$$
 e $(f_0)'_+(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k)'_+(t)$ $\forall t \in [a, b],$

e per l'arbitrarietà di a e b, questo è vero per ogni t interno ad I.

Capitolo 2

Volume e superficie di insiemi paralleli

2.1 Il volume di un r-parallelo

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per iniziare lo studio.

Definizione 2.1 (insieme metricamente associato). Siano X, A sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , diremo che X è metricamente associato con A se per ogni $p \in X$ esiste un punto $q \in \overline{A}$ tale che $|p - q| = d_A(p)$ e tutti i punti interni al segmento congiungente p e q appartengono a X.

Lemma 2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia X un insieme metricamente associato con A. Allora la funzione $f(r) := H^n(A_{\leq r} \cap X)$ è una funzione di Kneser.

Dimostrazione. Sia X un insieme metricamente associato con A. Fissiamo $\lambda > 1$.

Siano $y_2, x_2 \in X$, per ipotesi esistono $y_0, x_0 \in \overline{A}$ tali che $|x_2 - x_0| = d_A(x_2)$ e $|y_2 - y_0| = d_A(y_2)$, e dunque certamente è vero che

$$|y_2 - y_0|^2 \le |y_2 - x_0|^2$$
, $|x_2 - x_0|^2 \le |x_2 - y_0|^2$,

da cui si deduce subito che $|y_2 - x_0|^2 + |x_2 - y_0|^2 - |y_2 - y_0|^2 - |x_2 - x_0|^2 = 2\langle y_2 - x_2, y_0 - x_0 \rangle \ge 0.$

Prendiamo adesso y_1 sul segmento congiungente y_2 e y_0 tale che $\lambda |y_0 - y_1| = |y_0 - y_2|$, e analogamente x_1 sul segmento congiungente x_2 e x_0 tale che $\lambda |x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$: possiamo scrivere

$$\lambda(y_1 - x_1) = \lambda(y_1 - y_0 - (x_1 - x_0) + (y_0 - x_0)) =$$

$$= (y_2 - y_0 - (x_2 - x_0) + (y_0 - x_0) + (\lambda - 1)(y_0 - x_0) =$$

$$= y_2 - x_2 + (\lambda - 1)(y_0 - x_0)$$

e dunque vale

$$\lambda^{2}|y_{1}-x_{1}|^{2} = |y_{2}-x_{2}|^{2} + 2(\lambda - 1)\underbrace{\langle y_{2}-x_{2}, y_{0}-x_{0}\rangle}_{>0} + (\lambda - 1)^{2}|y_{0}-x_{0}|^{2} \ge |y_{2}-x_{2}|^{2}$$

Denotiamo, per $b \geq a$, $K(\lambda b, \lambda a) := H^n(X \cap (A_{<\lambda b} \setminus A_{<\lambda a}))$, la misura della "corona" parallela di raggi λa e λb intersecata con X.

Fissiamo $b \ge a$ e rinominiamo $K = K(\lambda b, \lambda a)$ per semplicità. Consideriamo per ogni $x_2 \in K$ l'insieme

$$F(x_2) = \{x_0 \in \overline{A} : |x_0 - x_2| = d_A(x_2)\};$$

possiamo poi prendere per ogni $x_0 \in F(x_2)$ i punti $x_1 = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_0 + \frac{1}{\lambda} x_2$ che descrivono un insieme $G(x_2)$.

Definiamo

$$L := \bigcup_{x_2 \in K} G(x_2)$$

$$g : L \to K, \qquad g(x_1) := x_2 \qquad \forall x_1 \in G(x_2).$$

Questa è una buona definizione poiché $G(x_2) \cap G(y_2) = \emptyset$ se $x_2 \neq y_2$: infatti se esiste $x_1 \in G(x_2) \cap G(y_2)$, allora vale

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x_0 + \frac{1}{\lambda}x_2 = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y_0 + \frac{1}{\lambda}y_2$$

da cui

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}_{\geq 0} (y_0 - x_0) = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}}_{\leq 0} (y_2 - x_2)$$

ma $\langle y_2 - x_2, y_0 - x_0 \rangle \ge 0$, quindi deve valere $x_0 = y_0$, il quale implica $x_2 = y_2$. Per quanto visto sopra, la g è lipschitziana di costante λ e quindi $L = g^{-1}(K)$ è misurabile.

Inoltre

$$H^n(K) = H^n(g(L)) \le \lambda^n H^n(L),$$

e ciò mostra che

$$f(\lambda b) - f(\lambda a) = H^n(X \cap (A_{<\lambda b} \setminus A_{<\lambda a})) \le \lambda^n H^n(X \cap (A_{< b} \setminus A_{< a})) = \lambda^n (f(b) - f(a)).$$

Proposizione 2.1. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, l'insieme $A_{< r}$ è metricamente associato ad A per ogni r > 0.

Dimostrazione. Preso $p \in A_{< r}$, abbiamo per definizione che $|p - q| = d_A(p)$ per qualche $q \in \overline{A}$. Sia x un punto nel segmento congiungente p e q, allora: $|x - q| \le |p - q| < r$ da cui $d_A(p) < r$.

Corollario 2.1. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato ed r > 0. Allora:

- 1. $V_A(r)$ è assolutamente continua in ogni $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$;
- 2. le derivate destra e sinistra $(V_A)'_{\pm}(r)$ esistono eccetto per un insieme numerabile di punti, inoltre $(V_A)'_{+}(r) \leq (V_A)'_{-}(r)$ e $(V_A)'_{+}(r) = (V_A)'_{-}(r)$ per $q.o.\ r;$
- 3. $(V_A)'_{\pm}(r)$ hanno limite destro e sinistro in ogni punto, diversi fra loro per al più un insieme numerabile di valori;
- 4. $(V_A)'_-(r)$ è continua a sinistra, $(V_A)'_+(r)$ è continua a destra.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.1 possiamo scegliere $X = A_{< r}$ come insieme metricamente associato ad A; sfruttando il lemma 2.1, e notando che in questo caso la funzione f evocata in tale lemma non è altro che la misura $H^n(A_{< r}) = H^n(A_r)$, si conclude che $V_A(r)$ è una funzione di Kneser.

A questo punto basta applicare il lemma 1.3.

Lemma 2.2. Sia A un insieme limitato in \mathbb{R}^n , allora

$$(\partial A_{<1})_{
(2.1)$$

dove $Y(t) = \{ p \in \mathbb{R}^n : 1 - t < d(p, A) < 1 \text{ e } d(p, \partial A_{<1}) > t \}$

Dimostrazione. (\subseteq) Sia $p \in (\partial A_{<1})_{< t}$, allora $d(p, \partial A_{<1}) < t$; sia ora $y \in \partial A_{<1}$ tale che $|p - y| = d(p, \partial A_{<1})$ (y esiste per compattezza). Si ha

$$|p-z| \le |p-y| + |y-z| \qquad \forall z \in A$$

da cui

$$d(p,A) \le |p-y| + d(y,A) = d(p,\partial A_{<1}) + d(y,A) < t + d(y,A)$$

ma essendo $y \in \partial A_{<1}$, vale d(y,A)=1, e quindi d(p,A)<1+t, cioè $p \in A_{<1+t}$.

Poi,

$$|p-z| \ge |y-z| - |p-y| \ge d(y,A) - d(p,\partial A_{<1}) > 1-t$$

quindi $p\notin \overline{A_{<1+t}}$

infine, dato che $d(p, \partial A_{<1}) < t$ sia ha $p \notin y(t)$.

$$(\supseteq)$$
 Sia $p \in [A_{<1+t} \backslash \overline{A_{<1-t}}] \backslash Y(t),$ allora

$$1 - t < d(p, A) < 1 + t$$

e inoltre $p \notin Y(t)$, per cui è falsa almeno una delle tre disuguaglianze che definiscono Y(t), ma non la prima.

Ci sono tre casi:

caso (a)
$$d(p, A) \ge 1 \ e \ d(p, \partial A_{<1}) > t;$$

caso (b)
$$1 - t < d(p, A) < 1 \text{ e } d(p, \partial A_{<1}) \le t$$
;

caso (c)
$$d(p, A) \ge 1 \ e \ d(p, \partial A_{<1}) \le t$$
.

Dimostrazione del caso (a) : vogliamo far vedere che questo caso è impossibile.

Si ha $1 \le d(p, A) < 1 + t$, in particolare quindi $p \notin A_{<1}$.

Se $p \in \partial A_{<1}$ allora $p \in (\partial A_{<1})_{< t}$.

Se $p \notin \overline{A_{<1}}$ allora $p \in A_{<1+t} \setminus \overline{A_{<1}}$.

Sia $z \in \overline{A}$ tale che $|p-z|=d(p,A)\in (1,1+t);$ sul segmento $\{y_s=(1-s)z+sp,s\in [0,1]\}$ vale

$$d(y_s, A) = \begin{cases} d(z, A) = 0 & \text{se } s = 0\\ d(p, A) > 1 & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Quindi esiste $y_{\overline{s}}$ con $\overline{s} \in [0, 1]$ tale che

$$d(y_{\overline{s}}, A) = |y_{\overline{s}} - z| = 1 = \overline{s}|p - z|.$$

Quindi $y_{\overline{s}} \in \partial A_{<1}$. Allora

$$|p - y_{\overline{s}}| = (1 - \overline{s})|z - p| = |z - p| - 1 \in (0, t),$$

per cui

$$d(p, \partial A_{<1}) \leq |p - y_{\overline{s}}| < t$$

che contraddice l'ipotesi, pertanto il caso (a) è impossibile.

Dimostrazione del caso (b) vogliamo far vedere che deve valere la diseguaglianza stretta $d(p, \partial A_{<1}) < t$, da cui seguirà la tesi. In altre parole dobbiamo far vedere che il caso $d(p, \partial A_{<1}) = t$ ci porta ad una contraddizione.

Se $d(p, \partial A_{<1}) < t$ ho $p \in (\partial A_{<1})_{< t}$, quindi posso supporte $d(p, \partial A_{<1}) = t$.

Sia $z \in \overline{A}$ tale che |p-z|=d(p,A). Considero i punti

$$q_s = (1-s)z + sp, s \ge 0;$$

poiché 1-t < d(p,A) < 1 esiste un $s_0 > 1$ tale che $|q_{s_0}-z| = s_0|p-z| = 1$.

Dato che $z \in \overline{A}$, $d(q_{s_0}, A) = 1$, dunque $q_{s_0} \in \partial A_{<1}$.

Ora
$$|p-q_{s_0}| = \frac{|1-s_0|}{s_0} |q_{s_0}-z| = \frac{s_0-1}{s_0} = 1 - \frac{1}{s_0}$$
; perciò

$$t = d(p, \partial A_{<1}) \le 1 - \frac{1}{s_0}$$

Ma $\frac{1}{s_0} = |p-z| > 1-t$, quindi $1 - \frac{1}{s_9} < t$, e questo è assurdo.

Dimostrazione del caso (c) in questo caso si arriva facilmente alla tesi tranne nel caso d(p,A) > 1 e $d(p,\partial A_{<1}) = t$, il quale risulta, come vogliamo dimostrare, impossibile.

Se $d(p, \partial A_{<1}) < t$ allora $p \in (\partial A_{<1})_{< t}$ ed abbiamo la tesi. Se invece vale d(p, A) = 1, allora abbiamo $p \in \partial A_{<1}$ ed è fatta.

Rimane il caso d(p, A) > 1 e $d(p, \partial A_{<1}) = t$.

Mettiamo in gioco il solito segmento $q_s = (1 - s)z + sp$ con $s \in (0, 1)$ e $z \in \overline{A}$: esiste un s_0 tale che $d(q_{s_0}, A) = s_0 d(p, A) = 1$.

Quindi
$$|p - q_{s_0}| = |(1 - s_0)z + s_0p - p| = (1 - s_0)|p - z| = \frac{1}{s_0} - 1 \ge t$$
.

Ma $|p-z| = \frac{1}{s_0} < 1 + t$ e questo è assurdo.

2.2 Volume e superficie

Siamo pronti per dimostrare uno dei teoremi cardine della teoria; si tratta di un risultato che collega la differenziabilità della funzione $V_A(r)$ con la "misura" del bordo di $A_{< r}$.

La "misura" in questione non è, come vorremmo, la misura di Hausdorff, ma il volume di Minkowski.

Teorema 2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Allora $M^{n-1}(\partial A_{< r})$ esiste per ogni r > 0 e vale la relazione

$$M^{n-1}(\partial A_{< r}) = \frac{(V_A)'_{-}(r) + (V_A)'_{+}(r)}{2}.$$

Dimostrazione. E' sufficiente considerare il caso r=1. Introduciamo la funzione $h: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ definita da

$$h(x) = \sup\{l : \exists p \in \overline{A} \in q \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } l = |p - q| = d(q, A) \text{ e il punto } x$$

giace sul segmento che unisce p a q}

Non è difficile verificare che l'immagine di h consiste solo di due punti: $0 e +\infty$.

Ne segue che la controimmagine $h^{-1}(a)$ per ogni $a \in [0, +\infty]$ è metricamente associata con A. Inoltre, è facile osservare che gli insiemi $h^{-1}([a, +\infty])$ sono chiusi, e perciò se B è un boreliano sottoinsieme di $[0, +\infty]$ allora $h^{-1}(B)$ è misurabile e metricamente associato con A.

Per ogni boreliano B sottoinsieme di $[0, +\infty]$ sia V_B la funzione

$$V_B(r) := H^n(A_{\leq r} \cap h^{-1}(B));$$

per il lemma 2.1 tutte le funzioni V_B sono di Kneser.

Ricordando la definizione 1.6, per provare l'esistenza di $M^{n-1}(\partial A_{< r})$ basta mostrare che esiste

$$\lim_{t \to 0} \frac{H^n((\partial A_{<1})_{< t})}{2t}.$$

Dunque, invocando il lemma 2.2, l'unica cosa che dobbiamo provare è che

$$\lim_{t \to 0} \frac{H^n(Y(t))}{2t} = 0, \tag{2.2}$$

dove $Y(t) = \{ p \in \mathbb{R}^n : 1 - t < d(p, A) < 1 \text{ e } d(p, \partial A_{<1}) > t \}.$

Per dimostrare ciò, osserviamo che

$$Y(t) \subseteq h^{-1}([0,1)) \cap (A_{<1} \setminus A_{1-t}) \text{ per } t \in (0,1)$$
 (2.3)

L'inclusione $Y(t) \subseteq A_{<1} \setminus A_{1-t}$ è ovvia. Supponiamo ora che per qualche punto $x \in Y(t)$ si abbia $h(x) \ge 1$. Questo significa che per qualche punto $q \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \overline{A}$ il punto x giace sul segmento chiuso fra p e q e vale |p-q|=

 $d(q, A) \ge 1$. Pertanto esiste un punto q_0 sul segmento chiuso pq giacente a distanza esattamente 1 da p, e abbiamo

$$1 = d(q_0, A) = |q_0 - p|$$

e questo implica che $q_0 \in \partial A_{<1}$, tuttavia abbiamo anche

$$|q_0 - x| = |q_0 - p| - |x - p| = 1 - d(x, A) < t$$

che ci porta ad una contraddizione.

A questo punto abbiamo

$$0 \le H^n(Y(t)) \le V_{[0,1)}(1) - V_{[0,1)}(1-t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ V_{\left[1-\frac{1}{k},1-\frac{1}{k+1}\right)}(1) - V_{\left[1-\frac{1}{k},1-\frac{1}{k+1}\right)}(1-t) \right\}$$

conseguentemente, per i lemmi 1.3 e 1.6,

$$0 \le \lim_{t \to 0} \frac{H^n(Y(t))}{2t} \le \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} V'_{\left[1 - \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k+1}\right)}(1).$$

Tuttavia, ogni funzione $V_{[a,b)}$ è costante per t>b, e questo prova la tesi. \square

Sfruttando il teorema 2.1, abbiamo le disuguaglianze

$$(V_A)'_+(r) \le M^{n-1}(\partial A_{< r}) \le (V_A)'_-(r).$$
 (2.4)

Mettiamo in gioco anche la seguente disuguaglianza, dovuta al fatto che $\partial A_r \subseteq \partial A_{< r}$:

$$H^{n-1}(\partial A_r) \le H^{n-1}(\partial A_{< r}). \tag{2.5}$$

Le disuguaglianze (2.4) e (2.5) possono essere strette, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.1. Basta prendere come A l'unione di due segmenti unitari e paralleli a distanza 2r in \mathbb{R}^2 .

Risulta $H^1(\partial A_r) = 2 + 4\pi r$ mentre $H^1(\partial A_{< r}) = 3 + 4\pi r$; questo accade perché il segmento unitario "mediano" fra i due segmenti dati non fa parte di ∂A_r ma fa parte di $\partial A_{< r}$.

Inoltre

$$(V_A)'_+(r) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{V_A(r+\epsilon) - V_A(r)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} 2 + 2\pi(\epsilon + 2r) - 2\frac{g(\epsilon)}{\epsilon} = 2 + 4\pi r,$$

dove $g(\epsilon) = (r+\epsilon)^2 \left(\arcsin\frac{\overline{x}}{r+\epsilon} + \frac{\overline{x}}{r+\epsilon}\cos(\arcsin\frac{\overline{x}}{r+\epsilon})\right) - 2r\overline{x}$, con $\overline{x} = \sqrt{2r\epsilon + \epsilon^2}$. Mentre

$$(V_A)'_{-}(r) = \lim_{\epsilon \to 0^{-}} \frac{V_A(r) - V_A(r - \epsilon)}{\epsilon} = 4 + 4\pi r,$$

perciò le derivate destra e sinistra sono diverse; essendo $M^1(\partial A_{< r})$ il valore medio delle due, vale

$$(V_A)'_+(r) < M^1(\partial A_{< r}) < (V_A)'_-(r).$$

Definizione 2.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce

 $\partial_+ E := \{ x \in \partial E : \text{ esiste un punto } y \notin E \text{ tale che } d_E(y) = |x - y| \}.$

Dato che $\partial_+ A_r \subseteq \partial A_r$, abbiamo la disuguaglianza:

$$H^{n-1}(\partial_+ A_r) \le H^{n-1}(\partial A_r), \tag{2.6}$$

la quale può essere stretta.

Esempio 2.2. Prendiamo per A in \mathbb{R}^2 l'unione di un compatto $C \subseteq [0, 1]$ totalmente sconnesso con $m_1(C) > 0$ e di $C + 2re_2$, con $e_2 = (0, 1)$,

Si ha che $C + re_2 \in \partial A_r$ ma $C + re_2 \notin \partial_+ A_r$, e pertanto $H^1(\partial_+ A_r) < H^1(\partial A_r)$.

Osservazione 2.1. Si può dimostrare (v. Hug, Last e Weil [4]) che per $A \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato ed r > 0 vale

$$(V_A)'_+(r) = H^{n-1}(\partial_+ A_r).$$

La dimostrazione non viene riportata perche' richiede strumenti al di là dell'ambito di questa tesi.

A questo punto, ci piacerebbe poter trasformare tutti i volumi di Minkowski in misure di Hausdorff. Purtroppo tale uguaglianza non sussiste in generale.

Quello che andiamo a dimostrare adesso è che nel nostro caso vale l'u-guaglianza che vorremmo. Per far questo, ci limitiamo a dimostrare che gli insiemi in questione sono rettificabili.

Definizione 2.3 (insieme rettificabile). Siano $k \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$, con $0 < k \le n$, A si dice k-rettificabile se esistono $D \subseteq \mathbb{R}^k$ limitato ed $f: D \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana tale che f(D) = A.

Osservazione 2.2. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è k-rettificabile allora ogni $B \subseteq A$ è k-rettificabile. Questo viene dal fatto che, detta $f: D \to \mathbb{R}^n$ la funzione per cui A è k-rettificabile, $f^{-1}(B) \subseteq D$ è limitato e $f|_{f^{-1}(B)}$ è ancora una funzione lipschitziana.

Osservazione 2.3. Si può dimostrare (v. Federer [3], 3.2.39) che se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e m-rettificabile, allora

$$\overline{M}^m(E) = \underline{M}^m(E) = H^m(E).$$

Proposizione 2.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, limitato. Allora ∂A_r e $\partial A_{< r}$ sono (n-1)-rettificabili per ogni r > 0.

Dimostrazione. Dato che $\partial A_r \subseteq \partial A_{< r}$ è sufficiente provare la rettificabilità di $\partial A_{< r}$ e, poiché $A_{< r} = \overline{A}_{< r}$ per ogni r > 0, possiamo assumere senza perdita di generalità che A sia compatto.

Dato un punto $z \notin A$, denotiamo

$$\Sigma_A(z) = \{ a \in A : |z - a| = d_A(z) \}$$

l'insieme di tutti i punti di A più vicini a z. $\Sigma_A(z) \neq \emptyset$ per la compattezza di A. Se A non è convesso, può esserci qualche z per cui $\Sigma_A(z)$ ha più di un elemento.

Il punto z si dice regolare se z non è contenuto in $H(\Sigma_A)$, l'involucro convesso di Σ_A . Un valore r > 0 si dice valore regolare di d_A se tutti i punti di $\partial A_{\leq r}$ sono regolari.

Sappiamo che $\partial A_{< r}$ è una varietà lipschitziana se r è un valore regolare.

Se r > diam(A) allora r è un valore regolare per d_A , infatti fissato $z \in \partial A_{\leq r}$ si ha $H(\Sigma_A) \subseteq H(A) \subseteq A_{\text{diam}(A)}$, dunque $z \notin H(\Sigma_A)$.

Se $r < \operatorname{diam}(A)$, ci basta sfruttare la compattezza per partizionare A in un numero finito di sottoinsiemi di diametro minore di r, ottenendo $A = E^1 \cup \cdots \cup E^k$, e notare che $\partial A_{< r} \subseteq \partial E^1_{< r} \cup \cdots \cup \partial E^k_{< r}$.

Ciascuno degli insiemi $\partial E_{< r}^{j}$ $(1 \leq j \leq k)$ è una varietà lipschitziana e, per la compattezza, è rettificabile.

Infine, osservando che la rettificabilità è preservata per unioni finite, abbiamo che $\partial A_{\leq r}$ è (n-1)-rettificabile.

Dunque

Corollario 2.2. Per ogni r > 0 vale

$$H^{n-1}(\partial A_r) = M^{n-1}(\partial A_r) \in H^{n-1}(\partial A_{\leq r}) = M^{n-1}(\partial A_{\leq r}).$$

24 CAPITOLO 2. VOLUME E SUPERFICIE DI INSIEMI PARALLELI

Adesso, ricordando le proprietà della funzione $V_A(r)$ come funzione di Kneser, possiamo dedurre il seguente fatto:

Corollario 2.3. La funzione $V_A(r)$ è differenziabile con

$$V_A'(r) = S_A(r)$$

per ogni r > 0 eccetto per un insieme numerabile di valori.

Dimostrazione. Il corollario 2.2 e le disuguaglianze (2.5) e (2.6) ci dicono che, ad eccezione di un insieme numerabile di valori:

$$(V_A)'_+(r) = H^{n-1}(\partial_+ A_r) \le H^{n-1}(\partial_+ A_r) \le H^{n-1}(\partial_+ A_r) = (V_A)'_-(r).$$

Il corollario 2.1 ci fornisce la tesi.

Inoltre abbiamo un altro corollario.

Corollario 2.4. Per ogni r > 0

$$S_A(r) \le \lim_{s \to r^-} V_A'(s).$$

(il limite è da intendersi per quegli s < r per cui V'_A esiste).

Dimostrazione. Il corollario 2.2 e le disuguaglianze (2.4) e (2.5) ci autorizzano a scrivere

$$S_A(r) = H^{n-1}(\partial A_r) = M^{n-1}(\partial A_r) \le M^{n-1}(\partial A_{< r}) \le (V_A)'_-(r).$$

La tesi segue dalla continuità a sinistra della funzione $(V_A)'_-$ provata nel corollario 2.1.

Capitolo 3

Studio asintotico

3.1 S-volume ed M-volume

Abbiamo visto come sono collegati $V_A(r)$ e $S_A(r)$ in termini differenziali. Adesso tentiamo uno studio qualitativo del comportamento di $S_A(r)$ al tendere di r a 0, sperando di ottenere informazioni anche sul comportamento di $V_A(r)$.

Per prima cosa introduciamo una nuova quantità in analogia con il volume di Minkowski.

Definizione 3.1 (S-volume). Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $s \in [0, n)$, l'S-volume inferiore s-dimensionale di A è definito da

$$\underline{S}^{s}(A) := \liminf_{r \to 0} \frac{S_{A}(r)}{(n-s)k_{n-s}r^{n-s-1}}$$

mentre quello superiore da

$$\overline{S}^{s}(A) := \limsup_{r \to 0} \frac{S_{A}(r)}{(n-s)k_{n-s}r^{n-s-1}}$$

con $k_t = \pi^{t/2}/\Gamma(1+\frac{t}{2})$. (Se t è intero, k_t non è altro che il volume della palla unitaria t-dimensionale).

Se $\underline{S}^s(A) = \overline{S}^s(A)$ il valore comune $S^s(A)$ è l'S-volume s-dimensionale di A.

La suddetta definizione non ha senso se s = n, ma poniamo per convenzione $S^n(A) := 0$.

Analogamente con quanto fatto con il volume di Minkowski definiamo pure una dimensione legata all'S-volume:

Definizione 3.2 (S-dimensione). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, compatto, si definisce S-dimensione inferiore di A il valore

$$\underline{\dim}_{S}(A) = \inf\{0 \le s \le n | \underline{S}^{s}(A) = 0\} = \sup\{0 \le s \le n | \underline{S}^{s}(A) = \infty\}$$

e S-dimensione superiore di A il valore

$$\overline{\dim}_{S}(A) = \inf\{0 \le s \le n | \overline{S}^{s}(A) = 0\} = \sup\{0 \le s \le n | \overline{S}^{s}(A) = \infty\}.$$

Qualora valesse l'uguaglianza, il comune valore $\dim_S(A)$ è detto S-dimensione di A.

Abbiamo adesso a che fare con due attori: il nuovo S-volume ed il vecchio volume di Minkowski, che possiamo rinominare M-volume. Ci chiediamo quali relazioni intercorrono fra S-volume e M-volume.

Per rispondere ci serve una proposizione:

Proposizione 3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, compatto, e sia $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione continua e differenziabile con h(0) = 0. Assumendo che h' non si annulli mai su un intorno destro di 0, posti

$$\underline{S} := \liminf_{r \to 0} \frac{S_A(r)}{h'(r)} \quad e \quad \overline{S} := \limsup_{r \to 0} \frac{S_A(r)}{h'(r)}$$

allora

$$\underline{S} \le \liminf_{r \to 0} \frac{V_A(r) - V_A(0)}{h(r)} \le \limsup_{r \to 0} \frac{V_A(r) - V_A(0)}{h(r)} \le \overline{S}. \tag{3.1}$$

In particolare se $\underline{S} = \overline{S}$, in altre parole se esiste il limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{S_A(r)}{h'(r)}$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{r \to 0} \frac{V_A(r) - V_A(0)}{h(r)}$$

e coincide con $S := \underline{S} = \overline{S}$.

Dimostrazione. Seguiremo le linee guida della dimostrazione classica del teorema di de l'Hospital, usando l'assoluta continuità della funzione V_A .

Dobbiamo usare il seguente fatto: per ognir>0esistono $0 < t_r^\prime, t_r^{\prime\prime} < r$ tali che

$$\frac{V_A'(t_r')}{h'(t_r')} \le \frac{V_A(r) - V_A(0)}{h(r)} \le \frac{V_A'(t_r'')}{h'(t_r'')}.$$
(3.2)

Per dimostrarlo, fissiamo r > 0. Dato che la funzione

$$\Phi(t) = (V_A(r) - V_A(0))h(t) - h(r)V_A(t) \qquad 0 \le t \le r,$$

è assolutamente continua e $\Phi(0) = \Phi(r)$, abbiamo $\int_0^r \Phi'(t)dt = 0$. Dunque, o $\Phi'(t) = 0$ per quasi ogni $t \in (0, r)$, o esistono $t'_r, t''_r \in (0, r)$ tali che $\Phi'(t'_r) > 0 > \Phi'(t''_r)$. Questo prova la (3.2).

Ricordiamo che $S_A(r) = V'_A(r)$ dove V'_A esiste.

A questo punto, operando il lim sup per $r \to 0$ alla diseguaglianza destra della (3.2), otteniamo:

$$\limsup_{r\to 0} \frac{V_A(r) - V_A(0)}{h(r)} \le \limsup_{r\to 0} \frac{S_A(t'_r)}{h'(t''_r)} \le \limsup_{r\to 0} \frac{S_A(r)}{h'(r)} = \overline{S},$$

che sarebbe la disuguaglianza destra nella (3.1).

Analogamente, l'uguaglianza sinistra si ottiene operando il liminf per $r \to 0$ alla diseguaglianza sinistra della (3.2).

Se
$$\underline{S} = \overline{S}$$
, l'esistenza del limite segue immediatamente dalla (3.1).

Corollario 3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, compatto. Assumendo che $V_A(0) = 0$, si ha per tutti gli $s \leq n$

$$\underline{S}^s(A) \le \underline{M}^s(A) \le \overline{M}^s(A) \le \overline{S}^s(A).$$

Dimostrazione. Se s=n abbiamo $\underline{S}^s(A)=\overline{S}^s(A)=0$ per definizione. Per ipotesi risulta $V_A(0)=0$ e dunque dalla continuità della funzione V_A abbiamo $\underline{M}^s(A) \leq \overline{M}^s(A)=0$.

Fissiamo ora s < n e sia $h(t) := k_{n-s}t^{n-s}$. Ovviamente risulta $h'(t) = (n-s)k_{n-s}t^{n-s-1}$. Per la proposizione 3.1 abbiamo

$$\underline{S}^{s}(A) = \liminf_{r \to 0} \frac{S_{A}(r)}{h'(r)} \le \liminf_{r \to 0} \frac{V_{A}(r)}{h(r)} = \underline{M}^{s}(A).$$

Abbiamo usato anche il fatto che $V_A(0) = 0$.

La relazione $\underline{M}^s(A) \leq \overline{M}^s(A)$ si ottiene in modo analogo applicando la terza diseguaglianza della (3.1).

Le disuguaglianze posso essere strette, come dimostrano i seguenti controesempi.

3.2 Due esempi

Esempio 3.1 (Insieme di Cantor). Richiamiamo due fatti sull'insieme di Cantor C in \mathbb{R} :

- C è generato dalle due similitudini $\Phi_1(x) = \frac{1}{3}x$ e $\Phi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$;
- $D := \dim_M(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$;



Naturalmente il diametro di C è 1. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e prendiamo $r \in I_n := [3^{-n}/2, 3^{1-n}/2).$

Sfruttiamo la seguente idea per calcolare C_r : prendiamo innanzi tutto la lunghezza di $[0,1]_r$, che risulta 2r+1; successivamente per $1 \le k \le n-1$ prendiamo la lunghezza della striscia "centrale" di diametro $1/3^k-2r$ e la tolgliamo alla lunghezza inziale per 2^{k-1} volte.

Risulta

$$V_C(r) = (2r+1) - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \left(\frac{1}{3^k} - 2r \right) = 2r + 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k r = 2^n r + \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}.$$

Sfruttando il corollario 2.3 possiamo dedurre subito che

$$S_C(r) = V'_C(r) = 2^n$$
.

Sia $t_n(\alpha) := \frac{\alpha 3^{-n}}{2}$, $\alpha \in [1,3)$, una parametrizzazione di I_n . Si ha $t_n(\alpha)^{-D} := \alpha^{-D} 2^D 2^n$ e perciò

$$\frac{S_C(t_n(\alpha))}{t_n(\alpha)^{-D}} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^D.$$

Questo rapporto non dipende da n.

Dato che vogliamo calcolare massimo limite e minimo limite della suddetta quantità per $n \to \infty$, possiamo semplicemente cercare massimo e minimo della funzione α^D in [1,3].

Per la crescenza della funzione $\alpha \mapsto \left(\frac{\alpha}{2}\right)^D$ possiamo dedurre subito che:

$$k_{1-D}\overline{S}^D(C) = \sup_{\alpha \in [1,3)} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{1-D} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^D = \frac{3^D}{2^D(1-D)} = \frac{2}{2^D(1-D)} \approx 3.51,$$

$$k_{1-D}\underline{S}^D(C) = \inf_{\alpha \in [1,3]} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{1-D} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^D = \frac{1}{2^D(1-D)} = \frac{1}{2} k_{1-D}\overline{S}^D(C) \approx 1.75.$$

Per quanto riguarda l'M-volume superiore e inferiore procediamo in modo simile: dato che $t_n(\alpha)^{1-D} = \frac{\alpha^{1-D}}{2^{1-D}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ risulta

$$\frac{V_C(t_n(\alpha))}{t_n(\alpha)^{1-D}} = \frac{2^{n-1}\alpha 3^{-n} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{\frac{\alpha^{1-D}}{2^{1-D}}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\alpha^D}{2^D} + \frac{3}{2^D}\alpha^{D-1} = \frac{1}{2^D}h(\alpha)$$

dove si è posto $h(\alpha) := \alpha^D + 3\alpha^{D-1}$. Fortunatamente anche stavolta non c'è la dipendenza da n. Possiamo semplicemente cercare massimo e minimo della funzione h in [1,3].

Imponendo $h'(\alpha) = 0$ troviamo un minimo $\underline{\alpha} = 3\frac{1-D}{D} \approx 1.76$.

Ne deduciamo che

$$k_{1-D}\overline{M}^D(C) = \frac{1}{2^D}\max\{h(1), h(3)\} = \frac{4}{2^D} \approx 2.56.$$

$$k_{1-D}\underline{M}^D(C) = \frac{1}{2^D}h(\underline{\alpha}) = \left(\frac{3}{2D}\right)^D \frac{1}{(1-D)^{1-D}} \approx 2.50.$$

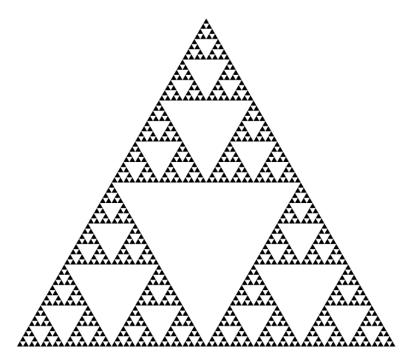
I quattro volumi sono tutti diversi fra loro:

$$\underline{S}^{D}(C) < \underline{M}^{D}(C) < \overline{M}^{D}(C) < \overline{S}^{D}(C).$$

Questo dimostra che le disuguaglianze del corollario 3.1 possono essere strette.

Esempio 3.2 (Triangolo di Sierpinski). Richiamiamo due fatti sul triangolo di Sierpinski F in \mathbb{R}^2 :

- F è generato dalle tre similitudini $\Phi_1(x) = \frac{1}{2}x$, $\Phi_2(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}, 0)$ e $\Phi_3(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$;
- $D := \dim_M(F) = \frac{\ln 3}{\ln 2}$;



Come nell'esempio precedente, andremo adesso a calcolare esplicitamente gli S-volumi e M-volumi superiori e inferiori dimostrando che sono tutti diversi fra loro.

Osserviamo che il diametro di $F
ilde{e} 1$. Per calcolare volume e superficie procediamo in modo analogo a quanto fatto con l'insieme di Cantor: prendiamo l'area dell'r-parallelo del triangolo di lato 1 e, per $1 \le k \le n$ vi togliamo per 3^{k-1} volte l'area di un triangolino "interno". Si ricava facilmente che, se l è il lato di un triangolo, il lato del triangolo "interno" bordato dall'r-parallelo vale $l-2\sqrt{3}r$.

Dato che vogliamo arrestare la somma dopo n-1 passi, ossia fare in modo che dopo n-1 passi r sia "troppo grande" per togliere qualcosa, prendiamo, per $n \in \mathbb{N}$, $r \in I_n := [\frac{1}{\sqrt{3}2^{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{3}2^n})$. L'area e la lunghezza del bordo di F_r sono dati da:

$$V_F(r) = \pi r^2 + 3r + \frac{\sqrt{3}}{4} - \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \left[\frac{1}{2^k} - 2\sqrt{3}r \right]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3^n\sqrt{3}}{2} \right) r^2 + 3\left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} r + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1},$$

$$V_F'(r) = S_F(r) = \left(2\pi + 3\sqrt{3} - 3^n\sqrt{3} \right) r + 3\left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}.$$

Sia $t_n(\alpha) := \alpha 2^{-n}$, $\alpha \in \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, una parametrizzazione di I_n . Si ha $t_n(\alpha)^{1-D} := \alpha^{1-D} 2^{-n(1-D)} = \alpha^{1-D} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ e perciò

$$\frac{S(t_n(\alpha))}{t_n(\alpha)^{1-D}} = \alpha^D c_n + 2\alpha^{D-1} =: h_n(\alpha)$$

dove $c_n = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3^n} - \sqrt{3}$. A differenza di quanto accadeva nell'esempio 3.1, $h_n(\alpha)$ è una funzione anche di n. Un facile studio della funzione $\alpha \mapsto h_n(\alpha)$ ci dice che la funzione assume massimo in $\overline{\alpha}_n = \frac{2(D-1)}{D|c_n|}$.

Per $n \to \infty$ abbiamo che $\overline{\alpha}_n \to \overline{\alpha} := \frac{2(D-1)}{D\sqrt{3}}$. Poiché $h_n \to h$ uniformemente su $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, abbiamo che $h_n(\overline{\alpha}_n) =$ $\max h_n \to h(\overline{\alpha}) = \max h.$

Inoltre si verifica che il minimo viene assunto da h_n in $\underline{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ per ogni n.

Allora

$$k_{2-D}\overline{S}^{D}(F) = \limsup_{r \to 0} \frac{S_{F}(r)}{(2-D)r^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{h_n(\overline{\alpha}_n)}{2 - D} = \frac{h(\overline{\alpha})}{2 - D} = \frac{3\sqrt{3}^{1 - D}}{(2 - D)(D - 1)} \left(1 - \frac{1}{D}\right)^D \approx 1.846.$$

E inoltre

$$k_{2-D}\underline{S}^{D}(F) = \liminf_{r \to 0} \frac{S_{F}(r)}{(2-D)r^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})^{1-D}} = \lim_{n \to \infty} \inf_{\alpha \in [\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})} \frac{S_{F}(\alpha 2^{-n})}{(2-D)(\alpha 2^{-n})}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{h_n(\frac{1}{2\sqrt{3}})}{2 - D} = \frac{h(\frac{1}{2\sqrt{3}})}{2 - D} = \frac{\sqrt{3}^{1 - D}}{2 - D} \approx 1.747.$$

Per quanto riguarda l'M-volume superiore e inferiore abbiamo

$$\frac{V(t_n(\alpha 2^{-n}))}{(\alpha 2^{-n})^{2-D}} = \frac{1}{2}\alpha^D c_n + 2\alpha^{D-1} + \frac{\alpha^{D-2}}{\sqrt{3}} =: g_n(\alpha),$$

con c_n come sopra.

Uno studio della funzione $g_n(\alpha)$ rivela l'esistenza di un punto di minimo $\alpha_n^- = \frac{D-1-\sqrt{\Delta_n}}{\frac{D}{2}[\sqrt{3}-\epsilon_n]}$ e di un punto di massimo $\alpha_n^+ = \frac{D-1+\sqrt{\Delta_n}}{\frac{D}{2}[\sqrt{3}-\epsilon_n]}$ dove $\Delta_n = (D-1)$ $(1)^2 - \frac{D}{2}(\sqrt{3} - \epsilon_n)\frac{2-D}{\sqrt{3}} e \epsilon_n = c_n + \sqrt{3}.$

Chiamando $\Delta = \lim_{n\to\infty} \Delta_n = (D-1)^2 - \frac{D}{2}(2-D)$ alla fine otteniamo

$$k_{2-D}\overline{M}^D(F) = \dots = 2^D \left(\frac{D-1+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}D}\right)^{D-1} \left[\frac{1-\sqrt{\Delta}}{D(2-D)}\right] \approx 1.814,$$

$$k_{2-D}\underline{M}^D(F) = \dots = 2^D \left(\frac{D-1-\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}D}\right)^{D-1} \left[\frac{1+\sqrt{\Delta}}{D(2-D)}\right] \approx 1.811.$$

Pertanto tutte le disuguaglianze del corollario 3.1 sono strette:

$$\underline{S}^{D}(A) < \underline{M}^{D}(A) < \overline{M}^{D}(A) < \overline{S}^{D}(A).$$

3.3 S-dimensione ed M-dimensione

Quali relazioni sussistono invece fra le dimensioni?

Se prendiamo insiemi "buoni" come le palle in \mathbb{R}^n , le dimensioni risultano naturali.

Osservazione 3.1. Presi $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, sia $B = B(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ la palla chiusa n-dimensionale di raggio ϵ centrata in x.

Si ha
$$V_B(r) = k_n(r+\epsilon)^n$$
 e $S_B(r) = nk_n(r+\epsilon)^{n-1}$. Dai rapporti

$$\frac{V_B(r)}{k_{n-s}r^{n-s}}$$
 e $\frac{S_B(r)}{(n-s)k_{n-s}r^{n-s-1}}$

si verifica immediatamente che vale

$$\underline{\dim}_{S}(B) = \overline{\dim}_{S}(B) = \dim_{S}(B) = n - 1$$

е

$$\underline{\dim}_{M}(B) = \overline{\dim}_{M}(B) = \dim_{M}(B) = n.$$

Vediamo cosa possiamo asserire a priori.

Corollario 3.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto, allora:

- (i) $\underline{\dim}_S(A) \leq \underline{\dim}_M(A)$;
- (ii) se $V_A(0) = 0$ allora $\overline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_S(A)$.

Dimostrazione. Dimostriamo la (i): se $\underline{\dim}_M(A) = n$ abbiamo la tesi, supponiamo dunque $\underline{\dim}_M(A) < n$. Questo implica $V_A(0) = 0$. Per ogni $\underline{\dim}_S(A) < s \leq n$, abbiamo, per il corollario 3.1 $\underline{S}^s(A) \leq \underline{M}^s(A) = 0$ e perciò $\underline{\dim}_S(A) = \inf\{t : \underline{S}^t(A) = 0\} \leq s$.

Poiché questo vale per ogni s arbitrariamente vicino a $\underline{\dim}_M(A)$, abbiamo $\underline{\dim}_S(A) \leq \underline{\dim}_M(A)$.

Se
$$V_A(0) = 0$$
 la (ii) segue con una dimostrazione analoga.

Lemma 3.1. Se $0 \le s < n$ allora

$$\limsup_{r \to 0} \frac{V_A(r)}{r^{n-s}} \ge \frac{n-s}{n} \limsup_{r \to 0} \frac{S_A(r)}{(n-s)r^{n-s-1}}$$

Dimostrazione. Per il lemma 2.1 abbiamo che $V'_A(r)$ esiste eccetto per un insieme numerabile di valori, possiamo dunque trovare una successione $\{r_i\}$ di punti decrescente a 0 dove V_A è differenziabile.

Per il corollario 2.4 abbiamo

$$\lim_{i \to \infty} \frac{V_A'(r_i)}{(n-s)r_i^{n-s-1}} = \limsup_{r \to 0} \frac{S_A(r)}{(n-s)r^{n-s-1}} = a < \infty.$$

Prendiamo $r_{i+1} \leq r \leq r_i$ tali che $V_A'(r), V_A'(r_i)$ e $V_A'(r_{i+1})$ esistono. Il teorema 1.4 mostra, in particolare, che la funzione $V_A'(r)r^{1-n}$ è monotona decrescente, permettendoci di scrivere

$$\frac{V_A'(r_i)}{r_i^{n-1}} \le \frac{V_A'(r)}{r^{n-1}} \le \frac{V_A'(r_{i+1})}{r_{i+1}^{n-1}}.$$
(3.3)

Dall'ipotesi che $V_A(0) = 0$ e dall'assoluta continuità di V_A ,

$$V_{A}(r_{i}) = \int_{0}^{r_{i}} V'_{A}(r) dr = \sum_{j=i}^{\infty} \int_{r_{j+1}}^{r_{j}} V'_{A}(r) dr$$

$$\geq \sum_{\text{per la (3.3)}} \sum_{j=i}^{\infty} \int_{r_{j+1}}^{r_{j}} V'_{A}(r_{j}) \frac{r_{j}^{n-1}}{r_{j}^{n-1}} dr$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} V'_{A}(r_{j}) \frac{r_{j}^{n} - r_{j+1}^{n}}{nr_{j}^{n-1}}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \frac{V'_{A}(r_{j})}{(n-s)r_{j}^{n-s-1}} \frac{n-s}{n} \frac{r_{j}^{n} - r_{j+1}^{n}}{r_{j}^{s}}$$

$$\geq \sum_{j=i}^{\infty} \frac{V'_{A}(r_{j})}{(n-s)r_{j}^{n-s-1}} \frac{n-s}{n} (r_{j}^{n-s} - r_{j+1}^{n-s}).$$
perché $r_{j} \geq r_{j+1}$

Se fisso un a' < a allora $\frac{V_A'(r_j)}{(n-s)r_j^{n-s-1}} \geq a'$ definitivamente.

Scelto i sufficientemente grande abbiamo che

$$\frac{V_A(r_i)}{r_i^{n-s}} \ge \frac{a' \frac{n-s}{n} \sum_{j=i}^{\infty} (r_j^{n-s} - r_{j+1}^{n-s})}{\sum_{j=i}^{\infty} (r_j^{n-s} - r_{j+1}^{n-s})} = a' \frac{n-s}{n},$$

e questo completa la dimostrazione.

Corollario 3.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto; per $0 \le s \le n$ vale

$$\overline{M}^s(A) \ge \frac{n-s}{n} \overline{S}^s(A).$$

Inoltre, se $V_A(0) = 0$, si ha $\overline{\dim}_M(A) = \overline{\dim}_S(A)$.

Dimostrazione. Naturalmente abbiamo, dal lemma 3.1,

$$\overline{M}^{s}(A) = \limsup_{r \to 0} \frac{V_{A}(r)}{k_{n-s}r^{n-s}} \ge \frac{n-s}{n} \limsup_{r \to 0} \frac{S_{A}(r)}{(n-s)k_{n-s}r^{n-s-1}} = \frac{n-s}{n} \overline{S}^{s}(A).$$

Se vale anche $V_A(0) = 0$, usando il corollario 3.1 possiamo scrivere

$$\overline{S}^s(A) \ge \overline{M}^s(A) \ge \frac{n-s}{n} \overline{S}^s(A)$$

da cui la tesi.

Curiosamente, l'analoga argomentazione fallisce quando si prova a dimostrare che $\underline{\dim}_M(A) = \underline{\dim}_S(A)$.

Corollario 3.4 (Disuguaglianza isoperimetrica). Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $m_n(\overline{S}) < \infty$, allora

$$\underline{M}^{n-1}(\partial S) \ge nk_n^{\frac{1}{n}} m_n(\overline{S})^{\frac{n-1}{n}}.$$
(3.4)

Dimostrazione. Notiamo che $\{x: 0 < d(x,S) < r\}, \{x: 0 < d(x,S^c) < r\} \subseteq \{x: d(x,\partial S) < r\} = (\partial S)_{< r},$ e che sono disgiunti.

Per il corollario 1.1

$$\frac{1}{r} m_n((\partial S)_{\leq r}) \geq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S^c) < r\}) \geq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S^c) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) \leq \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\}) + \frac{1}{r} m_n(\{x: 0 < d(x, S) < r\})$$

$$\geq nk_n^{\frac{1}{n}}[m_n(\overline{S})^{\frac{n-1}{n}} + m_n(\{x : d(x, S^c) \geq r)^{\frac{n-1}{n}}].$$

Per $r \to 0^+$ si ha, prendendo il minimo limite, e notando che $m_n(\partial S) = 0$ se $\underline{M}^{n-1}(\partial S) < \infty$,

$$2\underline{M}^{n-1}(\partial S) \ge nk_n^{\frac{1}{n}}(m_n(\overline{S})^{\frac{n-1}{n}} + m_n(\mathring{S})^{\frac{n-1}{n}}) = 2nk_n^{\frac{1}{n}}m_n(\overline{S})^{\frac{n-1}{n}}.$$

Sfruttando la disuguaglianza isoperimetrica, qualcosa si può dire.

Proposizione 3.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto; per $0 \le s \le n$ si ha

$$\underline{S}^{s\frac{n-1}{n}}(A) \ge c(\underline{M}^s(A))^{\frac{n-1}{n}},$$

dove c è una costante dipendente solo da s e n. Conseguentemente, si ha $\underline{\dim}_{S}(A) \geq \frac{n-1}{n}\underline{\dim}_{M}(A).$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza (3.4) e dal corollario 2.2 abbiamo, per ogni r > 0

$$nk_n^{1/n}V_A(r)^{(n-1)/n} \le \underline{M}^{n-1}(\partial A_r) = H^{n-1}(\partial A_r) = S_A(r).$$

Fissato $s \leq n$ e posto $s' = \frac{n-1}{n}s$, dividiamo per $(k_{n-s}r^{n-s})^{(n-1)/n} = k_{n-s}^{(n-1)/n}r^{n-1-s'}$.

Otteniamo, per ogni r > 0

$$\left(\frac{V_A(r)}{k_{n-s}r^{n-s}}\right)^{(n-1)/n} \le \frac{1}{nk_n^{1/d}k_{n-s}^{(n-1)/n}} \frac{S_A(r)}{r^{n-1-s'}} = c \frac{S_A(r)}{(n-s')k_{n-s'}r^{n-1-s'}},$$

con

$$c := \frac{(n-s')k_{n-s'}}{nk_n^{1/n}k_{n-s}^{(n-1)/n}}.$$

Se $\underline{S}^{s'}(A) = \infty$ la proposizione è ovvia, supponiamo dunque che $\underline{S}^{s'}(A) <$

Per definizione di minimo limite, possiamo scegliere una successione $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{m \to \infty} \frac{S_A(r_m)}{(n-s')k_{n-s'}r_m^{n-1-s'}} = \underline{S}^{s'}(A) < \infty.$$

Allora, per ogni $a > S^{s'}(A)$ e m sufficientemente grande, abbiamo

$$\frac{S_A(r_m)}{(n-s')k_{n-s'}r_m^{n-1-s'}} \leq a \text{ e dunque } \frac{V_A(r_m)}{k_{n-s}r_m^{n-s}} \leq ca^{n/(n-1)}.$$

Mandando $m \to \infty$ otteniamo

$$(\underline{M}^s(A))^{(n-1)/n} \le \left(\liminf_{m \to \infty} \frac{V_A(r_m)}{k_{n-s} r_m^{n-s}} \right)^{(n-1)/n} \le ca,$$

e poiché questo vale per ogni $a > \underline{S}^{s'}(A)$, vale la prima disuguaglianza.

A questo punto, per ottenere la seconda disuguaglianza basta notare che

$$\underline{\dim}_{M}(A) = \inf\{t : \underline{M}^{t}(A) = 0\} \le \inf\{t : (\underline{S}^{t\frac{n-1}{n}}(A))^{n/(n-1)} = 0\} = \\ = \inf\{t : \underline{S}^{t\frac{n-1}{n}}(A) = 0\} = \inf\left\{\frac{n}{n-1}t' : \underline{S}^{t'}(A) = 0\right\} = \frac{n}{n-1}\underline{\dim}_{S}(A).$$

Ricollegandosi agli esempi 3.1 e 3.2, possiamo dedurre che

$$0 \le \underline{\dim}_S(C) \le \underline{\dim}_M(C) = \overline{\dim}_M(C) = \overline{\dim}_S(C) = \dim_M(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

е

$$\frac{1}{2}\frac{\ln 3}{\ln 2} \leq \underline{\dim}_S(F) \leq \underline{\dim}_M(F) = \overline{\dim}_M(F) = \overline{\dim}_S(F) = \dim_M(F) = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

dove C ed F sono rispettivamente l'insieme di Cantor ed il triangolo di Sierpinski.

In altre parole per C coincidono ben tre delle dimensioni definite, eppure tutti e quattro gli M-volumi ed S-volumi $\dim_M(C)$ -dimensionali, pur essendo finiti e non nulli, differiscono.

Lo stesso vale per il triangolo di Sierpinski.

Bibliografia

- [1] P. Acquistapace: Appunti di Analisi Funzionale, http://www.dm.unipi.it/~acquistp/anafun.pdf.
- [2] R. C. Evans, R. F. Gariepy: Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, Boca Raton 1992.
- [3] H. Federer: Geometric Measure Theory, Springer, Heidelberg 1969.
- [4] D. Hug, G. Last, W. Weil: A local Steiner-type formula for general closed sets and applications. Math. Z. 246 (2004) 469 479.
- [5] M. Kneser: Über den Rand von Parallelkörpern. Math. Nachr. 5 (1951), 251-258.
- [6] M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen: Fractal geometry, complex dimensions and zeta functions. Geometry and spectra of fractal strings, Springer, New York 2006
- [7] J. Rataj, S. Winter: On the volume and surface area of parallel sets, http://arxiv.org/abs/0905.3279.
- [8] L. L. Stachó: On the volume functions of parallel sets. Acta. Sci. Math. 38 (1976), 365-374.