Speranza di una v.a. discreta

Sia X una v.a. discreta su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Detto E l'insieme (al più numerabile) dei valori di X, si dice che X è integrabile se il numero

$$\sum_{k\in E} |k|\, P(X=k)$$

è finito; in tal caso, si chiama speranza (o media) di X il numero

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in E} k\, P(X=k).$$

La notazione $\mathbb{E}[X]$ è dovuta al fatto che "speranza" si dice "espérance", "expectation" e "Erwartung" in francese, inglese e tedesco. Si scrive per semplicità $\mathbb{E}[X]$ (e non $\mathbb{E}_P(X)$), sebbene $\mathbb{E}$ dipende anche dalla probabilità P.

La speranza è la somma dei valori assunti da X, moltiplicati per la probabilità che ha X di assumere tali valori. Dunque $\mathbb{E}[X]$ è la media ponderata dei valori k assunti: il valore k interviene col peso $P(X=k)$.

Sia A un evento. La funzione indicatrice di A è la v.a.

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega\in A \\ 0 & \text{se } \omega\notin A; \end{cases}$$

è immediato verificare che I_A è una v.a. integrabile, e che

$$\mathbb{E}(cI_A) = cP(A) \qquad \forall c\in\mathbb{R}.$$

Utilizzando la funzione indicatrice, si vede subito che per ogni v.a. discreta X si può scrivere

$$X = \sum_{k \in E} k \, I_{\{X=k\}} .$$

<u>Osservazione</u> Se X è una v.a discreta, tale che $\{X \geq 0\}$ sia un evento quasi certo, cioè $P(X \geq 0) = 1$, allora la sua speranza è non negativa. Inoltre, se 2 v.a. X, Y sono <u>equivalenti secondo P</u>, cioè tali che l'evento $\{X=Y\}$ sia quasi certo, allora X e Y hanno la stessa legge, e quindi se sono integrabili hanno la stessa speranza: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.

Inoltre la speranza è <u>lineare</u>: se X, Y sono v.a. discrete integrabili, con insieme dei valori rispettivamente E_X ed E_Y, allora

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y], \\ \mathbb{E}[cX] = c\,\mathbb{E}[X] \qquad \forall c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La seconda proprietà è facile:

$$\mathbb{E}[cX] = \sum_{k \in E_{cX}} k \, P(cX = k) = \sum_{h \in E_X} ch \, P(cX = ch) =$$

$$= c \sum_{h \in E_X} h \, P(X = h) = c \, \mathbb{E}[X].$$

Proviamo la prima proprietà: si ha

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{n \in E_{X+Y}} n \, P(X+Y = n).$$

D'altronde,

$$\{X+Y=n\} = \bigcup_{k\in E_X} \{X=k,\ Y=n-k\}$$

e quindi

$$P(X+Y=n) = \sum_{k\in E_X} P(X=k,\ Y=n-k),$$

cioè

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{n\in E_{X+Y}} n \sum_{k\in E_X} P(X=k,\ Y=n-k)$$

D'altra parte

$$k\in E_X,\ n\in E_{X+Y},\ h=n-k \Rightarrow h\in E_Y,$$

$$k\in E_X,\ h\in E_Y,\ n=h+k \Rightarrow n\in E_{X+Y},$$

quindi

$$E[X+Y] = \sum_{h\in E_Y} \sum_{k\in E_X} (k+h)\, P(X=k,\ Y=h) =$$

$$= \sum_{k\in E_X} k \sum_{h\in E_Y} P(X=k, Y=h) + \sum_{h\in E_Y} h \sum_{k\in E_X} P(X=k, Y=h) =$$

$$= \sum_{k\in E_X} k\, P(X=k) + \sum_{h\in E_Y} h\, P(Y=h) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Inoltre la speranza è <u>isotona</u>, vale a dire si ha

$$P(X\le Y)=1 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \le \mathbb{E}[Y].$$

Infatti per linearità

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y-X] + \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[X],$$

visto che $Y-X$ è una v.a. quasi certamente non negativa.

Si ha poi questa utile e non del tutto intuitiva formula:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n),$$

che vale per ogni v.a. discreta, integrabile, a valori in $\mathbb{N}$.

Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k) = \mathbb{E}[X].$$

Infine, sia X una v.a. discreta e sia E_X l'insieme dei suoi valori. Sia inoltre $\phi : E_X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\sum_{k \in E_X} |\phi(k)|\, P(X=k) < \infty.$$

Allora la v.a. $\phi(X)$, a valori nell'insieme $\phi(E_X)$, ha la speranza

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{k \in E_X} \phi(k)\, P(X=k).$$

Infatti

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{h \in \phi(E_X)} h\, P(\phi(X)=h) = \sum_{h \in \phi(E_X)} h \sum_{k \in \phi^{-1}(h)} P(\phi(X)=h, X=k) =$$

$$= \sum_{h \in \phi(E_X)} \sum_{k \in \phi^{-1}(h)} \phi(k)\, P(X=k) = \sum_{k \in E_X} \phi(k)\, P(X=k).$$

Esercizi

- Sia X una v.a. discreta. Calcolare la speranza di X^2.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \in E_{X^2}} k\, P(X^2 = k) = \sum_{k \in E_{X^2}} k\, P(\{X = \sqrt{k}\} \cup \{X = -\sqrt{k}\}) =$$

$$= \sum_{k \in E_{X^2}} k\, P(X = \sqrt{k}) + \sum_{k \in E_{X^2}} k\, P(X = -\sqrt{k}) =$$

$$= \sum_{h \in E_X} h^2\, P(X = h).$$

- Si lanciano N monete equilibrate. Calcolare la legge della v.a. che rappresenta il n° di teste uscite, e calcolarne la speranza.

$$P(T = k) = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{N} k\, P(T = k) = \sum_{k=1}^{N} k \binom{N}{k} \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{N} N \binom{N-1}{k-1} =$$

$$= \frac{N}{2^N} \sum_{h=0}^{N-1} \binom{N-1}{h} = \frac{N}{2^N} 2^{N-1} = \frac{N}{2}.$$

- Buttiamo a caso 5 palline, una per volta, in 4 urne numerate. Sia X la v.a. che conta il n° di palline nella 1ª urna. Determinare la legge di X e la speranza di X.

$$P(X=k)=\binom{5}{k}\frac{1}{4^k}\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}, \quad k=0,1,2,3,4,5;$$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{5}k\binom{5}{k}\frac{3^{5-k}}{4^5}=\frac{1}{4^5}\sum_{k=1}^{5}5\binom{4}{k-1}3^{5-k}=\frac{5}{4^5}\sum_{h=0}^{4}\binom{4}{h}3^{4-h}=$$

$$=\frac{5}{4^5}(1+3)^4=\frac{5}{4}.$$

• Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album; egli compra una busta di 24 figurine (tutte diverse fra loro). Scrivere la legge della v.a. X che conta le figurine nuove tra le 24 acquistate, e calcolare $\mathbb{E}[X]$.

$$P(X=k)=\frac{\binom{40}{k}\binom{60}{24-k}}{\binom{100}{24}}, \quad k=0,1,\dots,24.$$

Poniamo $m=40$, $N=100$, $p=24$ e calcoliamo $\mathbb{E}[X]$ in generale.

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{p}k\,P(X=k)=\sum_{k=1}^{p}k\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{p-k}}{\binom{N}{p}}=\sum_{k=1}^{p}m\frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{p-k}}{\binom{N}{p}}=$$

$$=\frac{m}{\binom{N}{p}}\sum_{h=0}^{p-1}\binom{m-1}{h}\binom{N-m}{p-1-h}.$$

Si dimostra che

$$\sum_{h=0}^{n}\binom{r}{h}\binom{s}{n-h}=\binom{r+s}{n} \quad \text{per } r,s,n\in\mathbb{N} \text{ con } n\le r+s.$$

(convoluzione di Vandermonde, dimostrazione dopo). Ne segue

$$\mathbb{E}[X]=\frac{m}{\binom{N}{p}}\binom{N-1}{p-1}=\frac{mp}{N}.$$ Nel nostro caso, $\mathbb{E}[X]=\frac{96}{10}$.

Proviamo la <u>convoluzione di Vandermonde</u> $\sum_{h=0}^{n}\binom{r}{h}\binom{s}{n-h}=\binom{r+s}{n}$
per $0\le n\le r+s$. Se $r<n$ o $s<n$, a sinistra gli addendi con $h>r$, o con $n-h>s$, sono nulli perchè per $p<q$ si ha $\binom{p}{q}=\frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q!}=\frac{0}{q!}=0$.

Ciò premesso, si ha:

$$(1+x)^{r+s}=\sum_{n=0}^{r+s}\binom{r+s}{n}x^n,$$

$$(1+x)^r(1+x)^s=\sum_{h=0}^{r}\sum_{k=0}^{s}\binom{r}{h}\binom{s}{k}x^{h+k}=[n=h+k]$$

$$=\sum_{n=0}^{r+s}\sum_{h+k=n}\binom{r}{h}\binom{s}{n-h}x^n=[\text{aggiungendo addendi nulli}]$$

$$=\sum_{n=0}^{r+s}\sum_{h=0}^{n}\binom{r}{h}\binom{s}{n-h}x^n.$$

Queste due sommatorie sono due polinomi coincidenti: dunque per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti dei due polinomi coincidono. Perciò

$$\binom{r+s}{n}=\sum_{h=0}^{n}\binom{r}{h}\binom{s}{n-h},\quad n=0,1,\dots,r+s.\ \square$$

- Si gioca alla roulette puntando sempre sul 17. Quante giocate mediamente occorreranno prima che esca il 17?

Sia T = n° di giocate fino all'uscita del 17 (legge geometrica).
Si ha $P(T=k)=\frac{1}{37}\left(\frac{36}{37}\right)^{k-1}$, $\mathbb{E}(T)=\sum_{k=1}^{\infty}k\,P(T=k)=\frac{1}{37}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{36}{37}\right)^{k-1}=$

$$=\frac{1}{37}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^k\right]_{x=\frac{36}{37}}=\frac{1}{37}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=\frac{36}{37}}=37.$$

- Siano X, Y v.a. bernoulliane di parametri $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Determinare la legge delle v.a. $X+Y$, $X-2Y$, $|X-Y|$.

k	0	1	2
$P(X+Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

k	-2	-1	0	1
$P(X-2Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

k	0	1
$P(\|X-Y\|=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- In un test a risposte multiple ogni domanda presenta 5 possibili risposte. Ogni risposta esatta vale 1 punto, ogni risposta in bianco vale 0. Come dovrebbero valutarsi le risposte errate, in modo che chi risponde a caso ad ogni domanda totalizzi mediamente 0 punti?

Sia N il n° di domande, sia $-a$ $(a>0)$ il punteggio assegnato alle risposte errate. Sia X la v.a. che dà il punteggio, e sia Y la v.a. che conta le risposte giuste. Si ha $X = Y-(N-Y)a$, quindi $\mathbb{E}[X]=(1+a)\mathbb{E}[Y]-Na$.
Inoltre $P(Y=k)=\binom{N}{k}\frac{1}{5^k}\left(\frac{4}{5}\right)^{N-k}=\frac{1}{5^N}\binom{N}{k}4^{N-k}$, $k=0,1,\dots,N$.
Perciò

$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{k=1}^{N} k\,P(Y=k)=\sum_{k=1}^{N} k\binom{N}{k}4^{-k}\left(\frac{4}{5}\right)^N=$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^N N\sum_{h=0}^{N-1}\binom{N-1}{h}4^{-h-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^N\frac{N}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)^{N-1}=\frac{N}{5},$$

e infine $\mathbb{E}[X]=(1+a)\frac{N}{5}-Na$. Per avere $\mathbb{E}[X]=0$ ci vuole $-a=-\frac{1}{4}$.

- Sia X una v.a. discreta a valori in $\{0,1,2,3\}$, con legge

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0.2	0.3	0.2	0.3

Calcolare $\mathbb{E}[2X+1]$.

$$\mathbb{E}[2X+1] = 2\mathbb{E}[X]+1 = 2(0.3+0.4+0.9)+1 = 4.2$$

- Si lanciano 2 dadi. Sia X la v.a. che calcola il minimo fra i valori usciti dei 2 dadi. Si calcoli la legge di X. Si faccia un analogo studio per la v.a. Y che rappresenta il massimo.

Si ha

$P(X=1) = \frac{11}{36}$, $P(X=2) = \frac{9}{36}$, $P(X=3) = \frac{7}{36}$, $P(X=4) = \frac{5}{36}$, $P(X=5) = \frac{3}{36}$, $P(X=6) = \frac{1}{36}$. Inoltre $P(Y=k) = P(X=7-k)$: ad esempio, $P(Y=5) = \frac{9}{36} = P(X=2)$.

- Si lanciano 2 dadi; indichiamo con X e Y le v.a. che esprimono il risultato del 1° e del 2° lancio. Sia poi

$$Z(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } X(\omega)=Y(\omega) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Verificare che X e Z sono v.a. indipendenti.

(ii) Dedurre che anche Y e Z sono indipendenti.

(iii) Verificare che X, Y, Z non sono indipendenti.

[$P(X=k, Y=h, Z=1) = 0$ se $h \neq k$, ma $P(Z=1) = \frac{1}{6}$, $P(Y=h) = P(X=k) = \frac{1}{6}$.]