ANALISI 2	ma. 17/12/19

Svolgiamo l'ultimo esempio della scorsa lezione. Poichè l'insieme F si descrive come

$$E = \{(r,\theta,\varphi): (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\in F\} =$$

$$= \{(r,\theta,\varphi): 0\le r\le 1,\ 0\le r\cos\theta\le r\sin\theta,\ 0\le\varphi\le 2\pi\} =$$

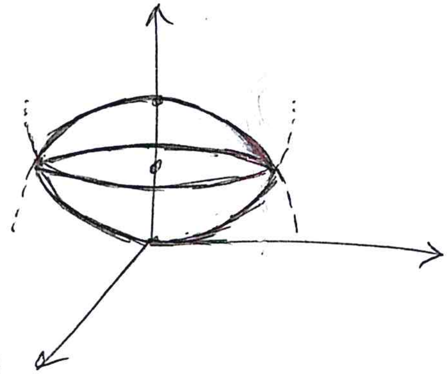
$$= [0,1]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi],$$

si ha

$$\int_F (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^2\cdot r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^4\,dr\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\pi\left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{5}\pi.$$

(2) $\int_F y^2 z\,dx\,dy\,dz$, $F=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\}$.



F è l'intersezione di due sfere: al di sotto della quota $z=\frac{1}{2}$, F è la calotta sferica

$$F_1 = \{(x,y,z): x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,\ z\le\tfrac{1}{2}\},$$

mentre al di sopra di tale quota, F è la calotta sferica

$$F_2 = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge\tfrac{1}{2}\}$$

L'insieme F_2 è descritto in coordinate sferiche da:

$$\varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in\left[0,\tfrac{\pi}{3}\right],\ r\in\left[\tfrac{1}{2\cos\theta},1\right],$$

mentre F_1 si descrive meglio in coordinate sferiche centrate in $(0,0,1)$, cioè

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 1+r\cos\theta; \end{cases}$$

allora F_1 è descritto da

$$\varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in\left[\tfrac{2}{3}\pi,\pi\right],\ r\in\left[-\tfrac{1}{2\cos\theta},1\right]\ \text{(si noti che } \cos\theta<0).$$

Perciò

$$\int_F y^2 z\,dx\,dy\,dz = \int_{F_1} y^2 z\,dx\,dy\,dz + \int_{F_2} y^2 z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\int_{-\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,(r\cos\theta+1)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,(r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Se nel 1° termine del 1° addendo poniamo $\alpha=\pi-\theta$, esso diventa

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\alpha}}^{1} r^2\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi\,(-r\cos\alpha)\,r^2\sin\alpha\,dr\,d\alpha\,d\varphi$$

e si va a cancellare con il 2° addendo. Resta dunque

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\int_{-\frac{1}{2\cos\theta}}^{1} r^4\sin^3\theta\sin^2\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^3\theta\cdot\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{32\cos^5\theta}\right)d\theta = [t=\cos\theta]$$

$$= \frac{\pi}{5}\int_{-1}^{-1/2} (1-t^2)\left(1+\frac{1}{32t^5}\right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{5}\int_{-1}^{-1/2} \left[1-t^2+\frac{1}{32t^5}-\frac{1}{32t^3}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{5}\left[t-\frac{t^3}{3}-\frac{t^{-4}}{128}+\frac{t^{-2}}{64}\right]_{-1}^{-1/2} =$$

$$= \frac{\pi}{5}\left[\frac{1}{2}-\frac{7}{24}-\frac{15}{128}+\frac{3}{64}\right] = \frac{53}{1920}\pi.$$

In questo caso sarebbe stato meno complicato l'uso delle coordinate cilindriche: avremmo avuto

$$D = \{(r,\theta,z) : (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in F\} =$$

$$= \left\{(r,\theta,z) : 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 1-\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2}\right\},$$

da cui:

$$\int_F y^2 z \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r^3 \sin^2\theta \, z \, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3 \left[1-r^2-\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)^2\right] dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3 \left[-1+2\sqrt{1-r^2}\right] dr = [r^2=t]$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{3}{4}} t\left[-1+2\sqrt{1-t}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{3/4} \left[-t+2(t-1+1)\sqrt{1-t}\right] dt =$$

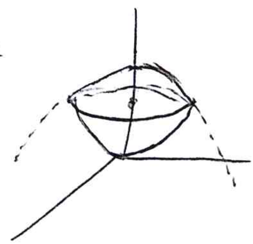
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{3/4} \left[-t-2(1-t)^{3/2}+2(1-t)^{1/2}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{4}{5}(1-t)^{5/2} - \frac{4}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^{3/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{9}{32} + \frac{1}{40} - \frac{4}{5} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right] =$$

$$= \frac{53}{1920}\pi .$$

(3) $\displaystyle\int_F z\,dx\,dy\,dz$, $F = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\}$



Si tratta dei punti situati sopra il paraboloide $z = x^2+y^2$ e sotto la calotta superiore della sfera $x^2+y^2+z^2=2$. Anche in questo caso è meglio utilizzare coordinate cilindriche: si ha

$$\{(r,\theta,z) : (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in F\} =$$

$$= \{(r,\theta,z) : r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2}\} = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2}\}.$$

Dunque

$$\int_F z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} rz\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} dr = \pi\int_0^1 r(2-r^2-r^4)\,dr =$$

$$= \pi\left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}\pi .$$

(4) Calcoliamo il baricentro dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1 , \ z \ge 0\} \text{ (emisfero superiore)}.$$

Il baricentro ha coordinate

$$\left(\frac{1}{m_3(E)} \int_E x \, dx dy dz , \ \frac{1}{m_3(E)} \int_E y \, dx dy dz , \ \frac{1}{m_3(E)} \int_E z \, dx dy dz\right).$$

(sempre che la densità del corpo sia 1). Per motivi di simmetria i primi 2 integrali sono nulli. Per il terzo, $m_3(E) = \frac{2}{3}\pi$ e

$$\int_E z \, dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)(r^2 \sin\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque la terza coordinata del baricentro è $\frac{3}{8}$.

(5) Calcoliamo il momento d'inerzia dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$$

rispetto all'asse z. In generale, detta $d(x,y,z)$ la distanza del generico punto rispetto a una fissata retta, il momento d'inerzia di E rispetto alla retta è $\int_E d^2(x,y,z) \, dx dy dz$.

Nel nostro caso si ha $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ e quindi si ha

$$\int_E \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy\,dz = \text{(in coordinate sferiche)}$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} r^4 \sin^3\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{32}{5}\cdot\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{32\pi}{10}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta = \quad [t=\cos\theta]$$

$$= \frac{16\pi}{5}\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt = \frac{32}{5}\pi \int_0^1 (1-t^2)\,dt = \frac{32\pi}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{64}{15}\pi .$$

(6) $\int_E |x| \, dx\,dy\,dz, \qquad E = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 1\right\}.$

Usiamo coordinate ellittiche, cioè sferiche "aggiustate":

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = r\sin\theta\cos\varphi \\ \frac{y}{3} = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \ \theta \in [0,\pi], \ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Allora, poiché il determinante della trasformazione è $6r^2 \sin\theta$,

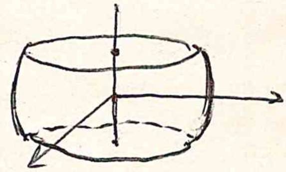
$$\int_E |x| \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 12\, r\sin\theta |\cos\varphi| r^2 \sin\theta \, d\varphi\, d\theta\, dr =$$

$$= 12 \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} |\cos\varphi| \, d\varphi =$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 6\pi \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi .$$

(7) Calcoliamo il volume di

$$P = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, \ |z| \le \tfrac{1}{2}\}.$$



In coordinate sferiche si ha

$$0 \le r \le 1, \qquad r|\cos\theta| \le \tfrac{1}{2},$$

dunque

$$0 \le r \le \min\left\{1, \frac{1}{2|\cos\theta|}\right\}.$$

Si ha $1 \le \dfrac{1}{2|\cos\theta|} \iff |\cos\theta| \le \tfrac{1}{2} \iff \theta \in \left[\tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}\right]$,

per cui

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 & \text{per } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \\ 0 \le r \le \dfrac{1}{2|\sin\theta|} & \text{per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]. \end{cases}$$

Pertanto

$$m_3(P) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^1 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{2|\cos\theta|}} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2|\cos\theta|}} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Gli ultimi 2 termini sono uguali, perché $|\cos\theta|$ e $\sin\theta$ sono funzioni simmetriche rispetto a $\pi/2$. Perciò

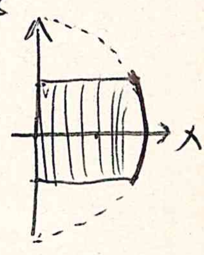
$$m_3(P) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^1 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi + 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{3}\, d\theta + 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{3} \cdot \frac{1}{8\cos^3\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left[-\cos\theta\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} + \frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2\cos^2\theta}\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{12}\pi.$$

Si poteva fare molto più in fretta, osservando che P è il ruotato attorno all'asse z dell'insieme

$$D = \{(x,z) : -\tfrac{1}{2} \le z \le \tfrac{1}{2},\ 0 \le x \le \sqrt{1-z^2}\},$$



e dunque, integrando "per dischi"

$$m_3(P) = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-z^2}\right)^2 dz =$$

$$= \pi \int_{-1/2}^{1/2} (1-z^2)\, dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z^2)\, dz =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right] = \frac{11}{12}\pi .$$

(8) $\int_E z x^2 \, dx\, dy\, dz, \quad E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 2,\ z \ge x^2+y^2\}.$

Meglio utilizzare le coordinate cilindriche. Si ha

$$r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2},$$

quindi $r^2 \le \sqrt{2-r^2}$, che equivale a $0 \le r \le 1$, e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Si ha

$$\int_E z x^2 \, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z r^2 \cos^2\theta \, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^1 r^2 \, \frac{2-r^2-r^4}{2} \, dr = \pi \int_0^1 \left(r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{2}\right) dr =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) = \frac{17\pi}{105}$$

Ultimi 3 esercizi prima di Natale:

1. Calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{1}{4+\cos^2 z}\, dx\,dy\,dz,$$

ove E è il ruotato attorno all'asse z di

$$D=\{(x,z):\ z\in[0,\pi],\ 0\le x\le 2-\cos z\}.$$

2. Calcolare le coordinate del baricentro di

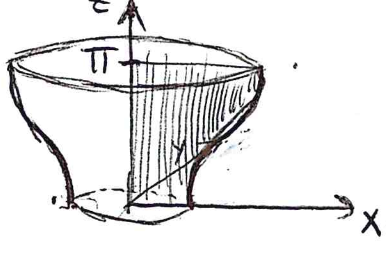
$$A=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le 3-x^2-y^2\}.$$

3. Stabilire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^2(1+x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\,dy\,dz.$$

Risoluzione

1. In coordinate cilindriche, E si rappresenta con



$$\begin{cases} x = r\cos\theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin\theta & r \in [0, 2-\cos z] \\ z = z & z \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Quindi

$$\int_E \frac{1}{4+\cos^2 z}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2-\cos z} \frac{1}{4+\cos^2 z}\, r\,dr\,dz\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{4+\cos^2 z}\,\frac{(2-\cos z)^2}{2}\,dz =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{4+\cos^2 z - 4\cos z}{4+\cos^2 z}\,dz =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{4\cos z}{5-\sin^2 z}\right] dz = \pi^2 - 4\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos z}{5-\sin^2 z}\,dz$$

$= \pi^2$ [il 2° integrale è nullo perché la funzione ha grafico simmetrico rispetto al punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.]

2. L'insieme A ha simmetria cilindrica, quindi le coordinate $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del baricentro $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono nulle. Si ha invece

$$\bar{z} = \frac{1}{m_3(A)} \int_A z\,dx\,dy\,dz;$$

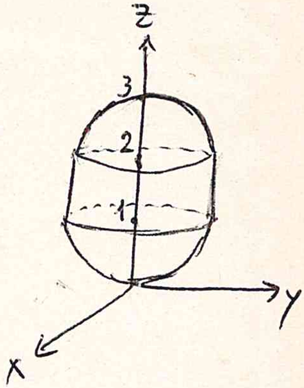
d'altra parte, osservato che $1-\sqrt{1-r^2} \le 3-r^2$ per ogni $r \in [0,1]$, si ha

$$m_3(A) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{3-r^2} r \, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\left(3-r^2-1+\sqrt{1-r^2}\right) dr =$$

$$= \pi\left(2-\frac{1}{2}\right) + 2\pi\int_0^1 \sqrt{1-t}\,\frac{dt}{2} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\pi = \frac{13}{6}\pi,$$



mentre

$$\int_A z\, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{3-r^2} rz\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\,\frac{(3-r^2)^2-(1-\sqrt{1-r^2})^2}{2}\, dr =$$

$$= \pi\int_0^1 \left[(3-t)^2-(1-\sqrt{1-t})^2\right]\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[(3-t)^2-1-1+t+2\sqrt{1-t}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{(3-t)^3}{3} - 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{4}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{8}{3}+9-2+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right] = \frac{37}{12}\pi.$$

Perciò

$$\bar{z} = \frac{37}{26}\pi.$$

3. In coordinate sferiche si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^2(1+x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\,(1+r^2\sin^2\theta)}{1+r^{2\alpha}}\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \pi \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{r^4\sin^3\theta\,(1+r^2\sin^2\theta)}{1+r^{2\alpha}}\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi\left[\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{r^4}{1+r^{2\alpha}}\sin^3\theta\, dr\, d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{r^6}{1+r^{2\alpha}}\sin^5\theta\, dr\, d\theta\right].$$

Ovviamente gli integrali rispetto a θ sono finiti. Affinché quelli rispetto a r siano finiti, non essendoci singolarità in 0 deve essere

$$4-2\alpha<-1, \quad 6-2\alpha<-1.$$

La seconda condizione implica la prima ed è quella da imporre: l'integrale converge per $\alpha > \frac{7}{2}$, e diverge per $\alpha \le \frac{7}{2}$.

Osservazione: l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^2(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\, dx\,dy\,dz,$$

invece, vale $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Infatti i due integrali risultanti, $\int_0^\infty r^{4-2\alpha}\,dr$, $\int_0^\infty r^{6-2\alpha}\,dr$, non possono convergere, qualunque sia α.