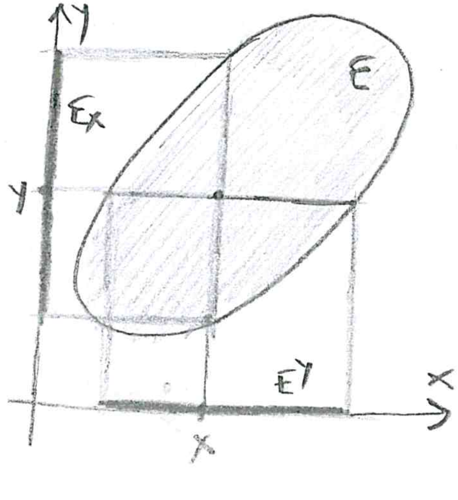
Calcolo degli integrali multipli

Forniremo una formula di riduzione di un integrale con N variabili a N integrali di una variabile.
A ben guardare si tratta di decomporre $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$, ove $h+k=N$, e di ridurre un integrale in N variabili a 2 integrali, uno in h variabili e uno in k variabili.
L'arbitrarietà di h e k farà il resto.
Cominciamo con il decomporre un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile in "sezioni" ortogonali di dimensioni h e k, esprimendo la misura $m_N(E)$ in termini di opportuni integrali rispetto a m_h e m_k.

Definizione Sia $E \in \mathcal{M}_N$. Per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^h$ e per ogni $\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ le sezioni E_x ed E^y di E sono così definite:

$$E_x = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^k : (\underline{x}, \underline{y}) \in E\},$$
$$E^y = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^h : (\underline{x}, \underline{y}) \in E\}.$$



Si noti che E_x ed E^y possono essere vuoti per certi x e certi y.
Inoltre, dalla definizione segue subito

$$(E\cup F)_x = E_x \cup F_x\,,\quad (E\cap F)_x = E_x\cap F_x\,,\quad (E\setminus F)_x = E_x\setminus F_x$$

e similmente per E^y e F^y.

<u>Proposizione</u> Se $E\in \mathcal{M}_N$, allora:

(i) $E_x\in \mathcal{M}_k$ per q.o. $x\in\mathbb{R}^h$, $E^y\in\mathcal{M}_h$ per q.o. $y\in\mathbb{R}^k$;

(ii) $x\longmapsto m_k(E_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}^h$, $y\longmapsto m_h(E^y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$;

(iii) risulta

$$m_N(E) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E^y)\,dy\,.$$

Quindi la misura di E si ottiene integrando per "fette" verticali od orizzontali.

<u>dim</u>. Omessa perché alquanto tecnica. $\square$

Si noti che il risultato di questa proposizione si può scrivere in modo più comodo e suscettibile di generalizzazioni: per ogni insieme misurabile $E\subseteq\mathbb{R}^N$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_E(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^h}\left[\int_{\mathbb{R}^k} I_E(x,y)\,dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^h} I_E(x,y)\,dx\right]dy\,.$$

Infatti basta osservare che

$$I_E(x,y) = I_{E_x}(y) = I_{E^y}(x)\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^N,$$

e che, per definizione,

$$\int_{\mathbb{R}^k} I_E(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} I_{E_x}(y)\,dy = m_k(E_x),$$

$$\int_{\mathbb{R}^h} I_E(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^h} I_{E^y}(x)\,dx = m_h(E^y),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_E(x,y)\,dx\,dy = m_N(E);$$

ne segue la tesi integrando la 1ª relazione rispetto a x in $\mathbb{R}^h$, e la seconda relazione rispetto a y in $\mathbb{R}^k$. $\square$

<u>Corollario</u> Siano $E \in \mathcal{M}_h$, $F \in \mathcal{M}_k$. Allora $E \times F \in \mathcal{M}_N$ e

$$m_N(E\times F) = m_h(E)\,m_k(F).$$

<u>dim</u>. La parte più pesante, che omettiamo, è provare che $E\times F \in \mathcal{M}_N$. Stabilito ciò, la formula è facile: infatti

$$(E\times F)_x = \begin{cases} F & \text{se } x \in E \\ \emptyset & \text{se } x \notin E \end{cases}, \qquad (E\times F)^y = \begin{cases} E & \text{se } y \in F \\ \emptyset & \text{se } y \notin F, \end{cases}$$

e quindi

$$m_N(E\times F) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k((E\times F)_x)\,dx = \int_E m_k(F)\,dx = m_k(F)\,m_h(E). \ \square$$

Adesso è facile dimostrare il seguente teorema generale:

<u>Teorema (di Fubini-Tonelli)</u> Sia $f: \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Siano k, h interi positivi tali che $k+h=N$. Allora:

(i) la funzione $f(\cdot, y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^h$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$ e la funzione $f(x, \cdot)$ è integrabile in $\mathbb{R}^k$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^h$;

(ii) la funzione $\int_{\mathbb{R}^h} f(x, \cdot)\,dx$ è integrabile in $\mathbb{R}^k$ e la funzione $\int_{\mathbb{R}} f(\cdot, y)\,dy$ è integrabile in $\mathbb{R}^h$;

(iii) risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^h}\left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx\right]dy = \int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^h} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

<u>dim</u> Se $f = I_E$, con $E \in \mathcal{M}_N$, il teorema è vero per la proposizione precedente:

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_E(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^h}\left[\int_{\mathbb{R}^k} I_E(x,y)\,dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^h} I_E(x,y)\,dx\right]dy.$$

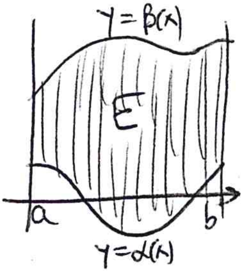
Per linearità, il risultato si estende a tutte le funzioni semplici, nulle fuori da un insieme di misura finita.

Per le funzioni non negative, la tesi si ottiene dal teorema di B. Levi, utilizzando una successione $\{\varphi_n\} \subseteq S_0$ tale che $0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1}$ e $\varphi_n(x,y) \nearrow f(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^N$.

Per le funzioni integrabili che cambiano segno, basta sottrarre le uguaglianze scritte per f^+ e f^-, il che è lecito perchè una almeno fra le due uguaglianze coinvolge quantità finite. □

Esempio (integrale su un insieme normale di $\mathbb{R}^2$).

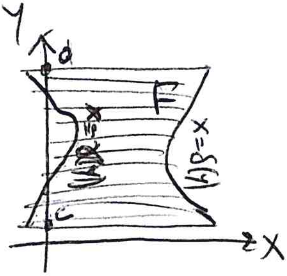
Un insieme normale rispetto all'asse x è della forma



$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$$

ove $\alpha,\beta\in C[a,b]$ e $\alpha\le\beta$ in $[a,b]$.

Un insieme normale rispetto all'asse y ha la forma



$$F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d,\ \gamma(y)\le x\le\delta(y)\},$$

ove $\gamma,\delta\in C[c,d]$ e $\gamma\le\delta$ in $[c,d]$.

Un insieme, quindi, è normale rispetto a un asse se è formato da rette perpendicolari a tale asse.

Sia f integrabile su E (normale rispetto all'asse x).

Come sappiamo,

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, I_E(x,y)\,dx\,dy.$$

Utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, I_E(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, I_E(x,y)\, dy \right] dx =$$

(essendo l'integrando nullo per ogni $y \in \mathbb{R}$ quando $x \notin [a,b]$)

$$= \int_a^b \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, I_E(x,y)\, dy \right] dx =$$

(essendo l'integrando nullo quando $y \notin [\alpha(x), \beta(x)]$)

$$= \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, I_E(x,y)\, dy \right] dx =$$

(essendo $I_E(x,y) = 1$ quando $x \in [a,b]$ e $y \in [\alpha(x), \beta(x)]$)

$$= \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right] dx .$$

In modo completamente analogo, se g è integrabile su F (insieme normale rispetto all'asse y), si ha

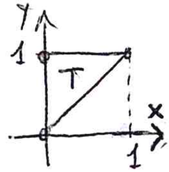
$$\int_F g(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, I_F(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\, I_F(x,y)\, dx \right] dy =$$

$$= \int_c^d \left[\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\, I_F(x,y)\, dx \right] dy =$$

$$= \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} g(x,y)\, I_F(x,y)\, dx \right] dy =$$

$$= \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} g(x,y)\, dx \right] dy .$$

<u>Esempi</u>: (1) $\int_T e^{y^2}\,dx\,dy$, $T\equiv$ triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.



L'insieme T è normale sia rispetto all'asse x,

$$T=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\},$$

sia rispetto all'asse y.

$$T=\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}.$$

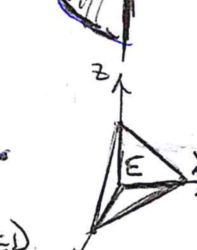
Possiamo scegliere l'una o l'altra formula: usando la prima

$$\int_T e^{y^2}dx\,dy=\int_0^1\left[\int_x^1 e^{y^2}dy\right]dx,$$

non sappiamo calcolare l'integrale più interno, perchè e^{y^2} non ha una primitiva esprimibile in termini elementari. Usando la seconda, invece,

$$\int_T e^{y^2}dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^y e^{y^2}dx\right]dy=\int_0^1 y e^{y^2}dy=\frac{1}{2}\left[e^{y^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

(2) $\int_D y^2\,dx\,dy$, $D=$ insieme delimitato dalle funzioni $x=1$ e $x=y^2$.



Si ha $D=\{(x,y):\ \ \le y\le 1,\ y^2\le x\le 1\}$. Quindi

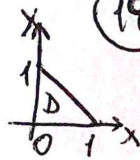
$$\int_D y^2dx\,dy=\int_{-1}^1\left[\int_{y^2}^1 y^2dx\right]dy=\int_{-1}^1 y^2(1-y^2)\,dy=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}.$$

(3) $m_3(E)$, $E=\{(x,y,z):\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}$.

Il solido E è il sottografico di $f(x,y)=1-x-y$, $(x,y)\in D$, ove D è il triangolo di base:

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$$



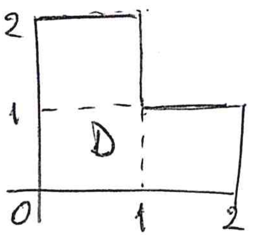
D è normale rispetto all'asse x, con $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1-x$.

Quindi

$$m_3(E) = \int_D (1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx = \left[-\frac{1}{6}(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Esempio. Calcolare $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D = ([0,2]\times[0,2]) \setminus ([1,2]\times[1,2])$.



L'insieme D non è normale rispetto a nessuno degli assi, secondo le nostre definizioni. Però possiamo decomporlo:

$$D = ([0,1]\times[0,2]) \cup [1,2]\times[0,1],$$

ed è allora unione di due insiemi normali rispetto a entrambi gli assi. Possiamo scrivere

$$\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\right] dy + \int_0^1 \left[\int_1^2 (x^2+y^2)\,dx\right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_0^1 dy + \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_1^2 dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} + y^2\right] dy + \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + y^2\right) dy = \frac{2}{3} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 + \frac{7}{3} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 6.$$

Integrali tripli

Consideriamo un insieme di $\mathbb{R}^3$ della forma seguente:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \quad \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\},$$

ove D è un chiuso di $\mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in C(D)$ con $\alpha \le \beta$. Un insieme di questo tipo è normale rispetto al piano xy. Se f è sommabile su E, si ha

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy.$$

Se poi D, a sua volta, è normale rispetto all'asse x,

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \quad p(x) \le y \le q(x)\},$$

con $p, q \in C[a,b]$ e $p \le q$, allora

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx.$$

Si osservi che, in questo caso, posto

$$E_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E\} = \{(y,z) : p(x) \le y \le q(x), \ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\},$$

si ha anche, dalla relazione precedente,

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{E_x} f(x,y,z)\,dy\,dz\right] dx;$$

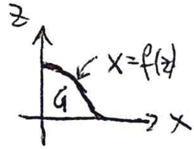
quindi si fa una integrazione per "fette verticali".

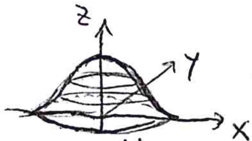
Il metodo di integrazione per fette è utile nel caso di solidi di rotazione: posto

$$G = \{(x,z) : a \le z \le b,\ 0 \le x \le f(z)\},$$

ove $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$, il ruotato di G attorno all'asse z è l'insieme

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b,\ \sqrt{x^2+y^2} \le f(z)\}$$





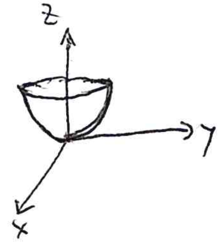
H

Allora integrando per fette orizzontali $H_z = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \le f(z)\}$, le quali sono dischi di centro O e raggio $f(z)$, si ha

$$m_3(H) = \int_a^b m_2(H_z)\, dz = \pi \int_a^b f(z)^2\, dz .$$

Esempio: sia $f(z) = \sqrt{z}$, $0 \le z \le 1$, cosicché

$$H = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le z \le 1\}.$$



Allora

$$m_3(H) = \pi \int_0^1 z\, dz = \frac{\pi}{2} .$$

Vediamo anche una applicazione del teorema di Fubini-Tonelli al calcolo dell'integrale di Riemann improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx := \lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx .$$

Si ha per ogni $a > 0$

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^a \left[\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dy\right] dx$$

Essendo $(x,y) = e^{-xy}\sin x$ sommabile su $[0,a]\times[0,\infty[$, dato che

$$\int_0^a\int_0^\infty e^{-xy}|\sin x|\,dy\,dx = \int_0^a \frac{|\sin x|}{x}\,dx < \infty,$$

per il teorema di Fubini-Tonelli otteniamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty\left[\int_0^a e^{-xy}\sin x\,dy\right]dx\,;$$

integrando 2 volte per parti si trova senza difficoltà

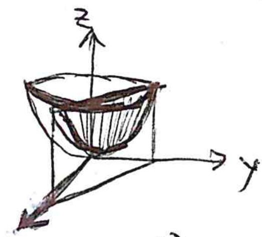
$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty\left[\frac{1}{1+y^2}\left(1-e^{-ay}(y\sin a+\cos a)\right)\right]dy.$$

Adesso mandiamo $a\to\infty$. Per convergenza dominata [infatti per $a\geq 1$ si ha $\frac{1}{1+y^2}\left(1-e^{-ay}(y\sin a+\cos a)\right)\leq\frac{1}{1+y^2}\left(2+e^{-y}y\right)$ e $\frac{1}{1+y^2}\left(2+e^{-y}\cdot y\right)$ è sommabile su $[0,\infty[$] si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Procediamo con un altro esempio

$$\int_E xyz\,dxdydz,\quad E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq x^2+y^2\}$$



Si ha

$$\int_E xyz\,dxdydz = \int_0^1\left[\int_x^1\left[\int_0^{x^2+y^2} xyz\,dz\right]dy\right]dx =$$

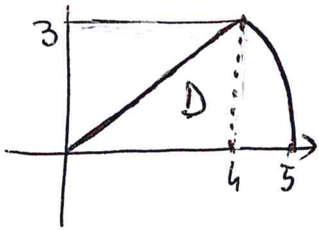
$$= \int_0^1\left[\int_x^1 xy\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\,dy\right]dx = \int_0^1 x\left[\frac{(x^2+y^2)^3}{12}\right]_x^1 dx = \int_0^1\frac{x}{12}\left[(x^2+1)^3-(2x^2)^3\right]dx = \frac{7}{96}$$

Altri esempi:

• $m_3(C)$, $C = \{(x,y,z): 0 \le z \le xy, \quad 0 \le y \le \frac{3}{4}x, \quad x^2+y^2 \le 25\}$.

C è il sottografico di $f(x,y) = xy$ su $D = \{(x,y): 0 \le y \le \frac{3}{4}x, \; x^2+y^2 \le 25\}$, e D è normale rispetto all'asse y: infatti l'intersezione fra la retta $y = \frac{3}{4}x$ e la circonferenza $x^2+y^2 = 25$ (nel 1° quadrante) è il punto $(4,3)$. Perciò

$$D = \{(x,y): 0 \le y \le 3, \; \tfrac{4}{3}y \le x \le \sqrt{25-y^2}\}.$$



Si ha dunque

$$m_3(C) = \int_D xy \, dx\,dy =$$

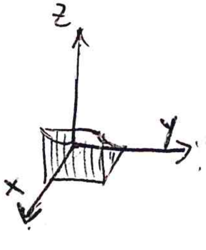
$$= \int_0^3 y \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x \, dx \, dy = \frac{1}{2}\int_0^3 y\left[25 - y^2 - \frac{16}{9}y^2\right] dy =$$

$$= \left[\frac{25}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{25}{18}\frac{y^4}{4}\right]_0^3 = \frac{225}{8}.$$

• $\int_D [xy + yz + zx] \, dx\,dy\,dz$, $D = \{(x,y,z): 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1, \; 0 \le z \le x^2\}$.

Si ha

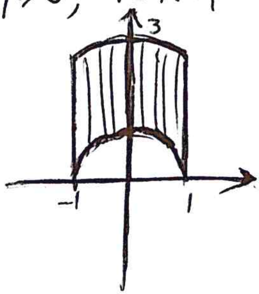
$$\int_D [xy + yz + zx] \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^{x^2} (xy+yz+zx)\, dz\right] dy\right] dx =$$



$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x^3 y + \frac{y x^4}{2} + \frac{x^5}{2} \right) dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{2} \right] dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{31}{120} .$$

- $\int_D (x^3+y)\, dx\, dy$, $D = \{ (x,y) : |x| \leq 1,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9 \}$



Si ha

$$\int_D (x^3+y)\, dx\, dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3+y)\, dy \right] dx =$$

$$= \int_{-1}^1 x^3 \left[\sqrt{9-x^2} - \sqrt{1-x^2} \right] dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[(9-x^2) - (1-x^2) \right] dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 8\, dx = 8 .$$