Il teorema di esistenza e unicità locale per sistemi differenziali del 1° ordine.

Alcuni preliminari: se $\underline{u}: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una funzione vettoriale, il suo integrale su $[a,b]$ è il vettore

$$\int_a^b \underline{u}(t)\,dt := \left(\int_a^b u_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b u_N(t)\,dt\right),$$

che ha senso a patto che le N componenti $u_1, \ldots, u_N$ di $\underline{u}$ siano funzioni integrabili secondo Riemann in $[a,b]$.

L'integrale vettoriale gode di tutte le usuali proprietà:

- è lineare: per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha
$$\int_a^b [\alpha\,\underline{u}(t) + \beta\,\underline{v}(t)]\,dt = \alpha \int_a^b \underline{u}(t)\,dt + \beta \int_a^b \underline{v}(t)\,dt\ ;$$
- è additivo sull'insieme di integrazione: se $a<c<b$ si ha
$$\int_a^b \underline{u}(t)\,dt = \int_a^c \underline{u}(t)\,dt + \int_c^b \underline{u}(t)\,dt;$$
- vale la disuguaglianza
$$\left|\int_a^b \underline{u}(t)\,dt\right|_N \leq \int_a^b |\underline{u}(t)|_N\,dt.$$

Le prime 2 proprietà sono di facile verifica; per la terza, si ha per ogni $\underline{y} \in \mathbb{R}^N$

$$\left\langle \int_a^b \underline{u}(t)\,dt, \underline{y} \right\rangle_N = \sum_{j=1}^N \int_a^b u_j(t)\,dt \cdot y_j = \int_a^b \sum_{j=1}^N u_j(t) y_j\,dt = \int_a^b \langle \underline{u}(t), \underline{y} \rangle_N\,dt;$$

ne segue, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\left| \left\langle \int_a^b \underline{u}(t)\,dt, \underline{y} \right\rangle_N \right| \le \int_a^b |\langle \underline{u}(t), \underline{y} \rangle_N|\,dt \le \int_a^b |\underline{u}(t)|_N\,dt \cdot |\underline{y}|_N .$$

Scelto $\underline{y} = \int_a^b \underline{u}(t)\,dt$, ricaviamo

$$\left| \int_a^b \underline{u}(t)\,dt \right|_N^2 \le \int_a^b |\underline{u}(t)|_N\,dt \cdot \left| \int_a^b \underline{u}(t)\,dt \right|_N$$

da cui la tesi.

<u>Enunciato del teorema</u>: siamo interessati al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = \underline{f}(t, \underline{u}(t)), & t \in I, \\ \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0, \end{cases}$$

ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\underline{f}$ è una funzione definita in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ a valori in $\mathbb{R}^N$.

Fissiamo bene le ipotesi:

- $A \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ è un aperto;
- $(t_0, \underline{u}_0) \in A$;
- $\underline{f} : A \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua, tale che:

per ogni compatto $K \subset A$ esiste una costante $H_K > 0$ per cui

$$|\underline{f}(t,\underline{x}) - \underline{f}(t,\underline{x}')|_N \leq H_K |\underline{x}-\underline{x}'|_N \quad \forall (t,\underline{x}),(t,\underline{x}') \in K$$

(diremo che $\underline{f}$ è localmente lipschitziana in $\underline{x}$, uniformemente rispetto a t).

Essendo $\underline{f}$ continua, per ogni compatto $K \subset A$ esiste anche, per il Teorema di Weierstrass, una costante $M_K > 0$ per cui

$$|\underline{f}(t,\underline{x})|_N \leq M_K \quad \forall (t,\underline{x}) \in K.$$

Ciò premesso, si ha

Teorema (di Cauchy-Lipschitz) Nelle ipotesi precedenti, esistono $a, b > 0$ tali che, posto $I = [t_0 - a, t_0 + a]$, $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : |\underline{x} - \underline{u}_0|_N \leq b\}$, esiste una e una sola funzione $\underline{u} : I \to B$, di classe C^1, tale che

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = \underline{f}(t, \underline{u}(t)), & t \in I \\ \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0 . \end{cases}$$

dim. Fissato un aperto limitato A', contenente $(t_0, \underline{u}_0)$ e tale che $\overline{A'} = A' \cup \partial A' \subset A$, esiste un intorno di $(t_0, \underline{u}_0)$, della forma $I \times B$, ove $I = [t_0 - a, t_0 + a]$, $B = \{\underline{x} \in A : |\underline{x} - \underline{u}_0|_N \leq b\}$, che è tutto contenuto in A'. Indichiamo con M, H le costanti M_K, H_K relative al compatto $\overline{A'}$, ed eventualmente rimpiccioliamo a, in modo che

$$Ma \leq b, \quad Ha < 1.$$

1° passo: trasformazione del problema di Cauchy in una equazione integrale.

Mostriamo che

$$\begin{cases} \underline{u} \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \\ \underline{u}'(t) = \underline{f}(t, \underline{u}(t)), \quad t \in I \\ \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \underline{u} \in C(I, \mathbb{R}^N) \\ \underline{u}(t) = \underline{u}_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \underline{u}(s))\,ds, \quad t \in I. \end{cases}$$

($\Rightarrow$) Se $\underline{u}$ risolve il sistema, allora $\underline{u} \in C(I, \mathbb{R}^N)$ e, integrando fra t_0 e t i due membri del sistema differenziale, troviamo

$$\underline{u}(t) - \underline{u}_0 = \int_{t_0}^{t} \underline{u}'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \underline{u}(s))\,ds,$$

quindi $\underline{u}$ risolve l'equazione integrale in I.

($\Leftarrow$) Se $\underline{u}$ risolve l'equazione integrale, allora $\underline{u}$ è continua e quindi $t \mapsto \underline{f}(t, \underline{u}(t))$ è continua. Dunque il secondo membro dell'equazione è C^1, e quindi $u \in C^1$. Derivando i due membri dell'equazione integrale si trova $\underline{u}'(t) = \underline{f}(t, \underline{u}(t))$, ed è chiaro che $\underline{u}(t_0) = \underline{u}_0$.

2° passo: costruzione di una soluzione dell'equazione integrale col metodo delle approssimazioni successive.

Poniamo per $t \in I$ e $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \underline{u}_0(t) \equiv \underline{u}_0, \\ u_{n+1}(t) = \underline{u}_0 + \int^{t} \underline{f}(s, \underline{u}_n(s))\,ds. \end{cases}$$

Mostriamo per induzione che

(1) $$|\underline{u}_n(t)-\underline{u}_0|_N \leq b \qquad \forall t\in I,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

dunque i punti $(t,\underline{u}_n(t))$ appartengono a $I\times B$,
e che inoltre

(2) $$|\underline{u}_{n+1}(t)-\underline{u}_n(t)|_N \leq M\,\frac{H^n}{(n+1)!}\,|t-t_0|^{n+1} \quad \forall t\in I,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

(questa sarà la stima chiave per realizzare l'approssimazione)

Proviamo (1). Se $n=0$ essa è ovvia; se vale per un indice n, dimostriamola per l'indice $n+1$:

$$|\underline{u}_{n+1}(t)-\underline{u}_0|_N \leq \left|\int_{t_0}^{t} |\underline{f}(s,\underline{u}_n(s))|_N\,ds\right| \leq \text{(poichè } (s,\underline{u}_n(s))\in I\times B)$$

$$\leq M\,|t-t_0| \leq Ma \leq b.$$

Dunque (1) vale per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Proviamo (2): per $n=0$

$$|\underline{u}_1(t)-\underline{u}_0| = \left|\int_{t_0}^{t}\underline{f}(s,\underline{u}_0)\,ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}|\underline{f}(s,\underline{u}_0)|_N\,ds\right| \leq M\,|t-t_0|;$$

se vale per n, proviamola per $n+1$: poichè $(s,\underline{u}_{n+1}(s)),(s,\underline{u}_n(s))\in I\times B$

$$|\underline{u}_{n+2}(t)-\underline{u}_{n+1}(t)|_N = \left|\int_{t_0}^{t}\left[\underline{f}(s,\underline{u}_{n+1}(s))-\underline{f}(s,\underline{u}_n(s))\right]ds\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t}|\underline{f}(s,\underline{u}_{n+1}(s))-\underline{f}(s,\underline{u}_n(s))|_N\,ds\right| \leq H\left|\int_{t_0}^{t}|\underline{u}_{n+1}(s)-\underline{u}_n(s)|_N\,ds\right| \leq$$

$$\leq HM\left|\int_{t_0}^{t}\frac{H^n}{(n+1)!}|s-t_0|^{n+1}\,ds\right| = \frac{H^{n+1}}{(n+2)!}\,M\,|t-t_0|^{n+2}$$

(Si noti che negli integrali precedenti la variabile t si muove non solo fra t_0 e t_0+a, ma anche fra t_0-a e t_0: ecco perché è necessario lasciare il valore assoluto al di fuori dell'integrale.)

3° passo: convergenza dell'approssimazione.

La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\underline{u}_{n+1}(s)-\underline{u}_n(s)\right]$$
converge totalmente, nel senso che
$$\sum_{n\geq 0}\sup_{s\in I}\left|\underline{u}_{n+1}(s)-\underline{u}_n(s)\right|_N<\infty.$$
Infatti
$$\sup_{s\in I}\left|\underline{u}_{n+1}(s)-\underline{u}_n(s)\right|_N\leq M\,\frac{H^{n+1}|s-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\leq\frac{M(Ha)^{n+1}}{(n+1)!}$$
e la tesi segue dal criterio del confronto. Detta $\underline{W}(s)$ la somma della serie, si ha (trattandosi di una serie telescopica)
$$\underline{W}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\underline{u}_{n+1}(s)-\underline{u}_n(s)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\underline{u}_{k+1}(s)-\underline{u}_k(s)\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\underline{u}_n(s)-\underline{u}_0.$$
Poiché la convergenza totale implica la convergenza uniforme, la successione delle approssimanti $\{\underline{u}_n\}$ converge uniformemente in I alla funzione $\underline{u}(s)=\underline{u}_0+\underline{W}(s)$. Poiché le $\underline{u}_n$ sono continue,

anche $\underline{u}$ è continua in I. Adesso passiamo al limite nella relazione che definisce le $\underline{u}_n$: osserviamo che $\underline{f}(s, \underline{u}_n(s))$ converge uniformemente a $\underline{f}(s, \underline{u}(s))$, dato che

$$|\underline{f}(s, \underline{u}_n(s)) - \underline{f}(s, \underline{u}(s))|_N \leq H\,|\underline{u}_n(s) - \underline{u}(s)| \quad \forall s \in I;$$

quindi, passando al limite sotto il segno di integrale,

$$\underline{u}(t) = \lim_{n\to\infty} \underline{u}_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[\underline{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(s, \underline{u}_n(s))\,ds\right] = \underline{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(s, \underline{u}(s))\,ds, \quad t \in I.$$

Ciò prova che $\underline{u}$ è soluzione dell'equazione integrale.

<u>4° passo</u>: unicità della soluzione.

Sia $\underline{u}^* \in C(I, \mathbb{R}^N)$ un'altra soluzione dell'equazione integrale (che equivale a dire: $\underline{u}^* \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ è un'altra soluzione del sistema). Allora

$$\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\underline{f}(s, \underline{u}(s)) - \underline{f}(s, \underline{u}^*(s))\right] ds, \quad t \in I;$$

quindi

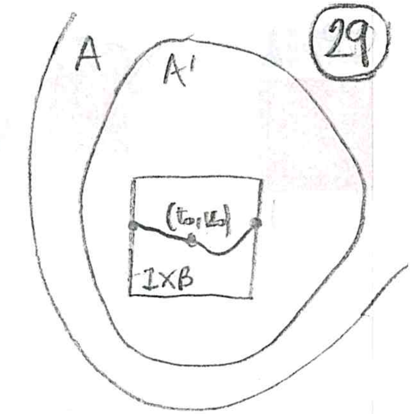
$$|\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)|_N \leq \left| \int_{t_0}^{t} |\underline{f}(s, \underline{u}(s)) - \underline{f}(s, \underline{u}^*(s))|_N \, ds \right| \leq$$

$$\leq Ha \left[\sup_{s\in I} |\underline{u}(s) - \underline{u}^*(s)|_N\right] \quad \forall t \in I,$$

da cui

$$\sup_{t\in I} |\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)|_N \leq Ha \left[\sup_{t\in I} |\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)|_N\right].$$

Dato che $Ha < 1$, ne segue che il sup è 0, ossia $\underline{u}^* \equiv \underline{u}$. $\square$



Prolungamento della soluzione locale

La soluzione $\underline{u}$ trovata arriva col suo grafico fino ai punti $(t_0 \pm a, \underline{u}(t_0 \pm a))$. Nulla ci vieta di considerare i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{v}'(t) = \underline{f}(t, \underline{v}(t)) \\ \underline{v}(t_0 \pm h) = \underline{u}(t_0 \pm h) \end{cases},$$

i quali avranno un'unica soluzione in $[t_0 - 2h, t_0]$ e in $[t_0, t_0 + 2h]$ rispettivamente; per unicità, tali soluzioni coincideranno con $\underline{u}$ sulle intersezioni $[t_0 - h, t_0]$ e $[t_0, t_0 + h]$. Tutto ciò si realizza finché il grafico non tocca $\partial A'$; al di là possiamo ancora prolungare la soluzione, ma con passo a più piccolo, perché cambieranno le costanti M, H. Si può comunque dimostrare che la soluzione esiste fintanto che il suo grafico non va a toccare il bordo di A: oltre non si può andare, perché f non è più definita. Ma può capitare che $|\underline{u}(t)|_N \to +\infty$ per $t \to t^*$, per qualche $t^* \in \mathbb{R}$ (dunque la soluzione arriva comunque al "bordo di A").

Esempio ($N=1$)
$$\begin{cases} u'(t) = 1 + u(t)^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Dunque $t_0 = 0$, $u_0 = 0$, $A = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = 1 + x^2$. La soluzione, col metodo di separazione delle variabili, è $u(t) = \operatorname{tg} t$; essa è definita su $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, intervallo massimale di esistenza, tende a $\pm\infty$ per $t\to\pm\frac{\pi}{2}$, ed il suo grafico esce da ogni compatto di $\mathbb{R}^2$ che contenga $(0,0)$.

<u>Osservazione</u> I <u>sistemi lineari</u> sono della forma

$$\begin{cases} \underline{u}'(t)=A(t)\,\underline{u}(t)+\underline{b}(t), & t\in I \text{ intervallo di } \mathbb{R}. \\ \underline{u}(t_0)=\underline{u}_0 \end{cases}$$

con A matrice $N\times N$ di funzioni $a_{ij}(t)$ continue su I, e $\underline{b}(t)$ funzione vettoriale continua su I. Si ha

$$\underline{f}(t,\underline{x})=A(t)\underline{x}+\underline{b}(t),\quad (t,x)\in I\times\mathbb{R}^N,$$

e risulta per $(t,\underline{x}),(t,\underline{x}')\in I\times\mathbb{R}^N$,

$$|\underline{f}(t,\underline{x})-\underline{f}(t,\underline{x}')|_N\le K(t)\,|x-x'|_N,\quad K(t)=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{N}|a_{ij}(t)|^2}.$$

Se $J\subseteq I$ è un intervallo limitato, la $\underline{f}$ verifica le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz in $J\times B$ $\left(B=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^N:\ |\underline{x}|_N\le C\}\right)$ con

$$M=\sup_{J\times B}K(t)\cdot C+\sup_{J}|\underline{b}(t)|_N,$$

$$H=\sup_{J}K(t),$$

quindi la soluzione $\underline{u}$ è definita su J con grafico contenuto in $J\times B$. Per l'arbitrarietà di J, la soluzione è definita su tutto I.

Quindi, se il sistema è lineare, a coefficienti continui la soluzione è definita nell'intero intervallo di definizione dei coefficienti: si dice che la soluzione è <u>globale</u>.