Esercizi su massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili

- $f(x,y) = 2x^3 + x^2 + y^2 - 2y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si ha $\nabla f(x,y) = (6x^2+2x,\ -6y^2+2y)$, quindi i punti stazionari sono $(0,0)$, $(0,\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3},0)$, $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Poiché

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x+2 & 0 \\ 0 & -12y+2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H_f(0,\tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ H_f(-\tfrac{1}{3},0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e dunque $(0,0)$ è punto di minimo relativo, $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ è punto di massimo relativo, mentre gli altri due sono punti di sella.

- $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ con $x>0$, $y>0$, $z>0$.

L'unico punto stazionario è $(1,1,1)$: infatti il sistema $\nabla f = 0$ è

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} + yz = 0 \\ -\frac{1}{y^2} + xz = 0 \\ -\frac{1}{z^2} + xy = 0 \end{cases}$$

da cui, moltiplicando le prime 2 equazioni, si trova $xyz^2 = \frac{1}{x^2y^2}$, ossia $z^2 = \frac{1}{x^3y^3}$, e dalla 3ª equazione $z^2 = \frac{1}{x^3y^3} = z^6$, vale a dire $z^4 = 1$. Perciò $z=1$ e, per simmetria, $x=1$ e $y=1$. Nella matrice Hessiana, che è

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}, \quad H_f(1,1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

i tre minori principali $2, 3, 4$ sono positivi. Quindi $(1,1,1)$ è punto di minimo relativo; ma è anche di minimo assoluto, perché f è illimitata superiormente in tutto il bordo dell'insieme di definizione.

• $f(x,y)=\dfrac{2x-y}{1+x^2+y^2}, \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2.$

Lo studio dei punti stazionari porta al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left[2(1+x^2+y^2)-2x(2x-y)\right]=0 \\ \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left[-(1+x^2+y^2)-2y(2x-y)\right]=0 \end{cases},$$

da cui $2x-y\neq 0$; quindi, eliminando $(1+x^2+y^2)$,

$$x(2x-y)=-2y(2x-y),$$

cioè $x=-2y$. Ne segue, dalla 1ª equazione,

$$(1+5y^2)+2y(-5y)=0, \quad \text{ossia} \quad -5y^2+1=0.$$

Dunque $y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}.$

Calcoliamo l'Hessiano:

$$f_{xx}=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left[(-4x+2y)(1+x^2+y^2)^2-4y(1+x^2+y^2)\right]\left[2(1+x^2+y^2)-2x(2x-y)\right]$$

$$f_{xy}=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left[(4y+2x)(1+x^2+y^2)^2-4y(1+x^2+y^2)\right]\left[2(1+x^2+y^2)-2x(2x-y)\right]$$

$$f_{yy}=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left[(2y-4x)(1+x^2+y^2)^2+2y(1+x^2+y^2)\right]\left[1+x^2+y^2+2y(2x-y)\right]$$

Osservato che per $(x,y) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$ si ha

$$1+x^2+y^2 = 2, \quad 4y+2x=0, \quad 2y-4x = \pm\left(-\frac{10}{\sqrt5}\right) = \mp 2\sqrt5,$$

si ha

$$f_{xx}\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{-1}{\sqrt5}\right)\right) = \frac{1}{16}\left[\mp 2\sqrt5\,(4) \pm \frac{8}{\sqrt5}\left[4 \mp \frac{4}{\sqrt5}(\pm\sqrt5)\right]\right] = \mp\frac{\sqrt5}{2},$$

$$f_{xy}\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = \frac{1}{16}\left[0 \pm \frac{8}{\sqrt5}\left[4 \mp \frac{4}{\sqrt5}(\pm\sqrt5)\right]\right] = 0,$$

$$f_{yy}\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = \frac{1}{16}\left[\mp 2\sqrt5\,(4) \mp \frac{4}{\sqrt5}\left[2 \mp \frac{2}{\sqrt5}(\pm\sqrt5)\right]\right] = \mp\frac{\sqrt5}{2}.$$

$$H_f\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt5}{2} \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right) \text{ è punto di massimo assoluto.}$$

$$H_f\left(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt5}{2} \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right) \text{ è punto di minimo assoluto.}$$

Si ha $f\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = \pm\frac{\sqrt5}{2}$; essendo $\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} f(x,y) = 0$, la funzione ha in $\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$ un <u>massimo assoluto</u> e in $\left(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$ un <u>minimo assoluto</u>.

- $f(x,y,z) = z(2x-y^2)$, $\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2z=0 \\ -2yz=0 \\ 2x-y^2=0 \end{cases}$ sono i punti $\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right), y\in\mathbb{R}$.

Quindi vi è un'infinità di punti stazionari <u>non isolati</u>, nei quali $f\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right) = 0$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2z & -2y \\ 2 & -2y & 0 \end{pmatrix},$$

e nei punti $\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right)$ risulta

$$H_f\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2y \\ 2 & -2y & 0 \end{pmatrix},$$

e $\det H_f\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi non si trae alcuna informazione. Però, scegliendo per $\varepsilon > 0$ i punti $\left(\frac{y^2}{2} \pm \varepsilon, y, \varepsilon\right)$, si ottiene

$$f\left(\frac{y^2}{2} \pm \varepsilon, y, \varepsilon\right) = \varepsilon\,(\pm 2\varepsilon) = \pm 2\varepsilon^2.$$

Dunque tutti i punti stazionari $\left(\frac{y^2}{2}, y, 0\right)$ sono punti di sella.

Questo non è un caso: infatti vale questo risultato:

<u>Proposizione</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Se $\{\underline{x}_n\} \subseteq A$ è una successione di punti stazionari per f, tale che $\exists \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}^* \in A$, con $\underline{x}_n \neq \underline{x}^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora:

(i) $\underline{x}^*$ è punto stazionario per f

(ii) $\det H_f(\underline{x}^*) = 0$.

<u>dim.</u>(i) Poiché $\nabla f(\underline{x}_n) = \underline{0}$ per ogni n, per continuità segue $\nabla f(\underline{x}^*) = \underline{0}$.

(ii) Per $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ fissato e per $n \in \mathbb{N}$ fissato, poniamo

$$g(\lambda) = \langle \nabla f((1-\lambda)\underline{x}^* + \lambda \underline{x}_n), \underline{v} \rangle_N, \quad \lambda \in [0,1].$$

Poiché A è aperto e $\underline{x}^* \in A$ per ipotesi, g è ben definita se n è abbastanza grande; inoltre $g \in C^1$, e $g(0) = g(1) = 0$ dato che $\underline{x}_n, \underline{x}^*$ sono punti stazionari.

Per il teorema di Rolle esiste $\lambda \in]0,1[$ (dipendente da n e da $\underline{v}$), tale che $g'(\lambda) = 0$, ossia

$$\langle H_f(\underline{\xi}_n)(\underline{x}_n - \underline{x}^*), \underline{v} \rangle_N = 0, \quad \text{ove } \underline{\xi}_n = (1-\lambda)\underline{x}^* + \lambda \underline{x}_n.$$

Poniamo $\underline{y}_n = \dfrac{\underline{x}_n - \underline{x}^*}{|\underline{x}_n - \underline{x}^*|_N}$; allora $\langle H_f(\underline{\xi}_n)\underline{y}_n, \underline{v} \rangle_N = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande e per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$. La successione $\{\underline{y}_n\}$ è limitata, quindi esiste una sottosuccessione $\{\underline{y}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge a un elemento $\underline{y}^* \in \mathbb{R}^N$, con $|\underline{y}^*|_N = 1$. Al limite per $k \to \infty$ si ha $\underline{\xi}_{n_k} \to \underline{x}^*$ e dunque

$$\langle H_f(\underline{x}^*)\underline{y}^*, \underline{v} \rangle_N = 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Quindi $H_f(\underline{x}^*)\underline{y}^* = \underline{0}$ (per l'arbitrarietà di $\underline{v}$); siccome $\underline{y}^* \neq \underline{0}$, deve essere $\det H_f(\underline{x}^*) = 0$. $\square$

Curve di livello di funzioni di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile, con A aperto. Consideriamo gli insiemi

$$Z_c = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = c \}, \quad c \in \mathbb{R};$$

se $Z_c \neq \emptyset$, si dice che Z_c è una <u>curva di livello</u> di f, anzi è la curva di livello c.

<u>Proposizione</u>. Se $Z_c \neq \emptyset$, $\underline{x}_0 \in Z_c$ e $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$, allora esiste in $\underline{x}_0$ il piano $(N-1)$-dimensionale tangente a Z_c, ed ha equazione

$$\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N = 0 .$$

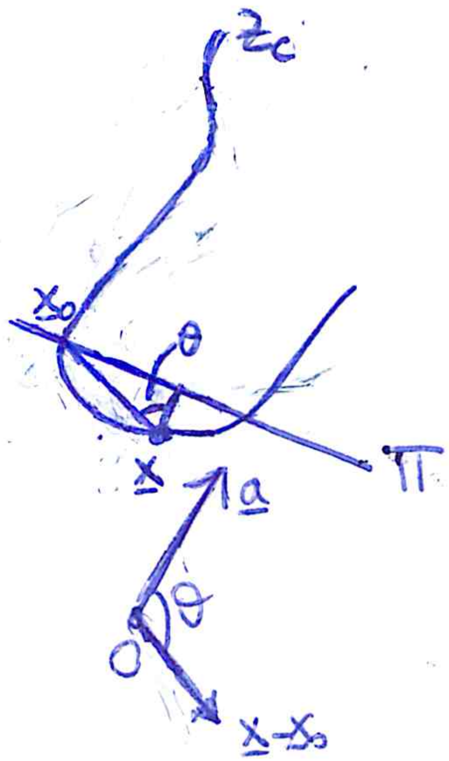
Dunque, $\nabla f(\underline{x}_0)$ è ortogonale alla curva di livello passante per $\underline{x}_0$.

<u>dim</u>. Sia $\underline{x}_0 \in Z_c$ e sia $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$. Consideriamo un generico piano Π passante per $\underline{x}_0$: esso ha equazione

$$\langle \underline{a}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N = 0 \qquad \text{con } \underline{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}.$$

Se $\underline{x}$ è un altro punto di Z_c, la sua distanza da Π è

$$d(\underline{x}, \Pi) = \min \{ |\underline{x}' - \underline{x}|_N : \underline{x}' \in \Pi \} = |\underline{x} - \underline{x}_0|_N |\cos \vartheta|,$$



ove θ è l'angolo fra $\underline{x}-\underline{x}_0$ e $\underline{a}$; ma

$$|\cos\theta| = \frac{|\langle \underline{x}-\underline{x}_0, \underline{a}\rangle_N|}{|\underline{x}-\underline{x}_0|_N \, |\underline{a}|_N},$$

quindi

$$d(\underline{x},\Pi) = \langle \underline{x}-\underline{x}_0, \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\rangle_N .$$

Dunque, qualunque sia $\underline{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$,

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} d(x,\Pi) = 0 .$$

Se però scegliamo $\underline{a} = \nabla f(\underline{x}_0)$, dalla differenziabilità di f e dal fatto che $f(\underline{x}_0) = f(\underline{x}) = c$, si ha

$$\frac{d(\underline{x},\Pi)}{|\underline{x}-\underline{x}_0|_N} = \frac{|\langle \underline{x}-\underline{x}_0, \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N}\rangle_N|}{|\underline{x}-\underline{x}_0|_N} = \frac{|f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|_N)|}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N \, |\underline{x}-\underline{x}_0|_N} =$$

$$= \frac{o(|x-x_0|_N)}{|x-x_0|_N \, |\nabla f(x_0)|_N} \longrightarrow 0 .$$

Dunque il piano di equazione

$$\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x}-\underline{x}_0 \rangle_N$$

è l'<u>unico</u> per il quale si ha

non solo $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} d(\underline{x},\Pi) = 0$, ma anche $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \frac{d(\underline{x},\Pi)}{|\underline{x}-\underline{x}_0|_N} = 0$.

Perciò tale piano è il <u>piano tangente</u> a Z_c in $\underline{x}_0$ - Π

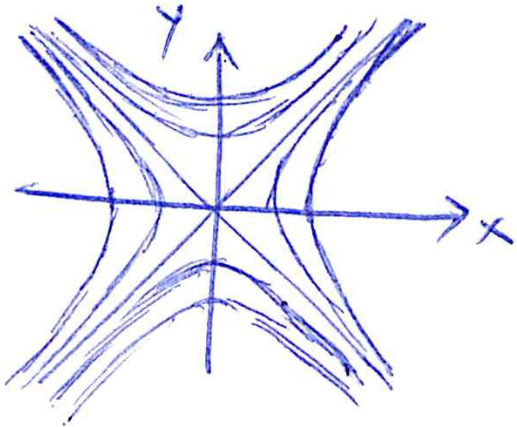
Osservazione: se $\underline{v}$ è una direzione tangente a Z_c, allora

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{x}), \underline{v} \rangle_N = 0,$$

poiché $\nabla f(\underline{x}) \perp Z_c$.

Esempi (1) Le circonferenze $x^2+y^2=c$ sono le curve di livello c della funzione $z=x^2+y^2$, di livello $\sqrt{c}$ della funzione $z=\sqrt{x^2+y^2}$, eccetera.

(2) La funzione $z=x^2-y^2$ ha per curve di livello delle iperboli:



Esercizio Trovare il massimo e il minimo su $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y).$$

[gradiente $=0 \iff \sin x = \sin y = -\sin(x+y)$,

punti stazionari: $(0,0), (\pi,\pi), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), (0,\pi), (\pi,0)$ (a meno di multipli di 2π), Hessiana $= \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$; si trova

$\max f = f(0,0) = 3, \quad \min f = f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2}$.]