Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $\underline{x}_0 \in A$.

Definizione Diciamo che $\underline{x}_0$ è punto di massimo relativo per f se esiste $r>0$ tale che

$$|\underline{x}-\underline{x}_0|_N < r \implies f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0).$$

Diciamo che $\underline{x}_0$ è punto di minimo relativo per f se esiste $r>0$ tale che

$$|\underline{x}-\underline{x}_0|_N < r \implies f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0).$$

Proposizione Sia f differenziabile in A. Se $\underline{x}_0$ è punto di massimo o di minimo relativo per f, allora $\underline{x}_0$ è un punto stazionario, cioè si ha $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$.
Il viceversa è falso.

dim. Sia $g(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$, con $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ fissato e $|t|$ piccolo: Allora g ha un massimo, oppure un minimo, in $t=0$, ed è una funzione derivabile. Perciò $g'(0)=0$; ma

$$g'(0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle_N = 0 \quad \forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^N,$$

e dunque $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, ossia $\underline{x}_0$ è punto stazionario per f.
Il viceversa è falso già per $N=1$: $f(x)=x^3$ soddisfa $f'(0)=0$, ma 0 non è né punto di massimo relativo né punto di minimo relativo. $\square$

Proposizione Sia f derivabile 2 volte in A. Sia $\underline{x}_0 \in A$.

(i) Se $\underline{x}_0$ è punto di massimo relativo per f, allora

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}, \quad \langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v} \rangle_N \leq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N$$

(cioè $H_f(\underline{x}_0)$ è semi-definita negativa

(ii) Se $\underline{x}_0$ è punto di minimo relativo per f, allora

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}, \quad \langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v} \rangle_N \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N$$

(cioè $H_f(\underline{x}_0)$ è semi-definita positiva

iii) Se $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ e $\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v} \rangle_N < 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$,

(ossia $H_f(\underline{x}_0)$ è definita negativa,

allora $\underline{x}_0$ è punto di massimo relativo.

iv) Se $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ e $\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v} \rangle_N > 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$,

(ossia $H_f(\underline{x}_0)$ è definita positiva

allora $\underline{x}_0$ è punto di minimo relativo.

dim. (i)-(ii) $g(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$ è derivabile 2 volte, e ha un massimo, o un minimo, in $t=0$. Quindi, $g'(0)=0$, e $g''(0) \leq 0$ o $g''(0) \geq 0$.

Perciò $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, come già sappiamo, e $g''(t) = \sum_{i,j=1}^{N} D_i D_j f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) v_i v_j$,

da cui $g''(0) = \langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v} \rangle_N \leq 0$ o $\geq 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N$.

iii)-(iv) Dalla formula di Taylor, sapendo che $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$,

$g(t) = g(0) + \cancel{g'(0)t} + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$; dunque,

$$f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)=\frac{t^2}{2}\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v},\underline{v}\rangle_N+o(t^2).$$

Supponiamo che $H_f(\underline{x}_0)$ sia definita positiva: allora il polinomio di 2° grado

$$\underline{v}\longmapsto\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v},\underline{v}\rangle_N$$

è una funzione continua e strettamente positiva su $\mathbb{R}^N\setminus\{\underline{0}\}$, e dunque essa ha minimo positivo δ nell'insieme compatto

$$K=\partial B(\underline{x}_0,1)=\{\underline{v}\in\mathbb{R}^N:\ |\underline{v}|_N=1\}.$$

Perciò, per ogni $v\in K$,

$$\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v},\underline{v}\rangle_N\geq\delta\quad\forall\,\underline{v}\in K.$$

Dunque se $r>0$ è tale che $B(\underline{x}_0,r)\subseteq A$, e $\underline{x}\in B(\underline{x}_0,r)$, possiamo scrivere $\underline{x}=\underline{x}_0+t\underline{v}$ con $|t|<r$ e $\underline{v}\in K$. Ne segue

$$f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)=f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)=\frac{t^2}{2}\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v},\underline{v}\rangle_N+o(t^2)\geq$$

$$\geq\frac{t^2}{2}\left[\delta+\frac{o(t^2)}{t^2}\right]\geq\frac{\delta}{4}>0$$

purché r sia abbastanza piccolo (ricordando che $|t|<r$).
Perciò $\underline{x}_0$ è punto di minimo relativo.

Se invece $H_f(\underline{x}_0)$ è definita negativa, si avrà

$$\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v},\underline{v}\rangle_N\leq-\delta\quad\forall\,v\in K,$$

e con lo stesso procedimento si trova che $\underline{x}_0$ è punto di massimo relativo. $\square$

Osservazione Se $f \in C^2(A)$, allora $H_f(\underline{x}_0)$ è una matrice simmetrica; se f è solo derivabile 2 volte, allora in generale $H_f(\underline{x}_0)$ non è simmetrica: tuttavia in tal caso

$$\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v} \rangle_N = \left\langle \frac{H_f(\underline{x}_0) + H_f(\underline{x}_0)^t}{2} \underline{v}, \underline{v} \right\rangle_N ,$$

ove $H_f(\underline{x}_0)^t$ è la matrice trasposta di $H_f(\underline{x}_0)$. Dunque, in ogni caso, la forma quadratica $\langle H_f(\underline{x}_0)\underline{v}, \underline{v}\rangle_N$ si esprime tramite una matrice simmetrica.

Rimanendo per semplicità nel caso $f \in C^2$, cosicché $H_f(\underline{x}_0)$ è simmetrica, si hanno questi fatti:

$H_f(\underline{x}_0)$ definita positiva $\iff$ tutti gli autovalori di $H_f(\underline{x}_0)$ sono positivi;

$H_f(\underline{x}_0)$ semidefinita positiva $\iff$ tutti gli autovalori di $H_f(\underline{x}_0)$ sono ≥ 0 (e qualcuno è nullo).

$H_f(\underline{x}_0)$ definita negativa $\iff$ tutti gli autovalori di $H_f(\underline{x}_0)$ sono negativi,

$H_f(\underline{x}_0)$ semidefinita negativa $\iff$ tutti gli autovalori di $H_f(\underline{x}_0)$ sono ≤ 0 (e qualcuno è nullo).

$H_f(\underline{x}_0)$ indefinita $\iff$ vi sono sia autovalori positivi, sia autovalori negativi.

Criteri per stabilire il segno degli autovalori di una matrice simmetrica.

(a) <u>caso $N=2$</u>, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

- $a>0$, $\det A > 0 \Longrightarrow$ autovalori positivi,
- $a<0$, $\det A > 0 \Longrightarrow$ autovalori negativi,
- $\det A < 0 \Longrightarrow$ un autovalore positivo e un autovalore negativo
- $\det A = 0 \Longrightarrow$ almeno un autovalore nullo.

Quindi, se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è di classe C^2, e se $\underline{x}_0 \in A$ è tale che $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, allora, posto $A = H_f(\underline{x}_0)$, si ha:

$a>0$, $\det A > 0 \Rightarrow \underline{x}_0$ è punto di minimo relativo,

$a<0$, $\det A > 0 \Rightarrow \underline{x}_0$ è punto di massimo relativo,

$\det A < 0 \Rightarrow \underline{x}_0$ è <u>punto di sella</u> (cioè è stazionario, ma non è né punto di massimo relativo, né punto di minimo relativo).

$\det A = 0 \Rightarrow$ non si può dire nulla.

(b) <u>Caso $N=3$</u>, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & g \end{pmatrix}$.

Se i minori principali a, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $\det A$, sono positivi, allora A è definita positiva. Se $a<0$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} > 0$, $\det A < 0$, allora A è definita negativa. In tutti gli altri casi (con minori $\neq 0$), A è indefinita. Se qualche minore è nullo, non si può dire nulla.