Risolviamo il 1° esercizio di pag. 216.

La funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua se e solo se $\alpha+\beta>2$. Infatti, se $\alpha+\beta>2$,

$$f(x,y)=\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{|x|^\alpha |y|^\beta \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+\beta-2}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+\beta}}\leq\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+\beta-2}$$

per ogni $(x,y)\neq(0,0)$. Ne segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 .$$

Viceversa, se $\alpha+\beta=2$, allora lungo la retta $y=kx$ si ha

$$f(x,kx)=\frac{|x|^{\alpha+\beta}|k|^\beta}{(1+k^2)x^2}=\frac{\cancel{x^2}\,|k|^\beta}{\cancel{x^2}(1+k^2)}=\frac{|k|^\beta}{1+k^2}$$

e dunque il limite scritto sopra non esiste; se poi $\alpha+\beta<2$, allora

$$f(x,y)=\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha+\beta}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2-\alpha-\beta}} ;$$

il primo fattore è limitato e non tende a 0, il secondo diverge.
Quindi $f(x,y)\to+\infty$ per $(x,y)\to(0,0)$.

Nei punti $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ la funzione f è continua perché non presenta singolarità il denominatore.

La funzione f ha derivate parziali nulle in $(0,0)$, visto che vale 0 in ogni punto del tipo $(x,0)$ o $(0,y)$.

Quindi, per testare la differenziabilità di f in (0,0), occorre verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0 .$$

Procedendo come prima, si ottiene che f è differenziabile in (0,0) se e solo se $\alpha+\beta>3$.

Però la f è differenziabile in ciascun punto $(x_0,0)$ con $x_0\neq 0$ se e solo se $\beta>1$, e similmente è differenziabile in ciascun punto $y_0\neq 0$ se e solo se $\alpha>1$. Infatti se $x_0\neq 0$ si ha, se $\beta>1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{|x_0|^\alpha |y|^\beta}{\sqrt{x_0^2+y^2}\cdot y}=0,$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} =$$

$$\leq |x_0|^{\alpha-1} \lim_{y\to 0} |y|^{\beta-1} = 0 .$$

Analogamente si procede, se $\alpha>1$, per i punti $(0,y_0)$ con $y_0\neq 0$.
Viceversa, se $\beta\leq 1$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ non esiste, e se $\alpha\leq 1$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ non esiste, cosicché f non può essere differenziabile.

Differenziabilità di funzioni composte

Definizione Sia $\underline{g}: B \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^N$, ove B è un aperto: dunque

$$\underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}), \dots, g_N(\underline{x})), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Le funzioni $g_1, \dots, g_N$ sono le componenti scalari di $\underline{g}$. Diremo che $\underline{g}$ è continua o differenziabile in un punto $\underline{x}_0 \in B$ se tali sono le componenti scalari di $\underline{g}$.

Il teorema di differenziabilità delle funzioni composte è molto generale e conviene iniziare da un caso particolare.

Teorema Sia $f: A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\underline{g}: I \to A$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Se in un punto $t_0 \in I$ la $\underline{g}$ è derivabile, e se in $\underline{g}(t_0)$ la f è differenziabile, allora la funzione composta $f \circ \underline{g} := f(\underline{g}(\cdot))$ è derivabile in t_0, con

$$(f \circ \underline{g})'(t_0) = \frac{d}{dt}[f(\underline{g}(t_0))] = \langle \nabla f(\underline{g}(t_0)), \underline{g}'(t_0) \rangle_N .$$

dim. Poiché f è differenziabile in $\underline{g}(t_0)$, possiamo scrivere

$$f(\underline{g}(t)) = f(\underline{g}(t_0)) + \langle \nabla f(\underline{g}(t_0)), \underline{g}(t) - \underline{g}(t_0) \rangle_N + |\underline{g}(t) - \underline{g}(t_0)|_N \, \omega(\underline{g}(t) - \underline{g}(t_0)),$$

ove ω è un infinitesimo quando $t \to t_0$ e dunque $\underline{g}(t) \to \underline{g}(t_0)$, visto che $\underline{g}$ è continua (essendo derivabile). Inoltre, poiché $\underline{g}$ è derivabile in t_0, si ha

$$\underline{g}(t) - \underline{g}(t_0) = \underline{g}'(t_0)(t - t_0) + |t - t_0| \, \underline{\omega}_0(t - t_0), \quad \text{con } |\underline{\omega}_0(r)|_N \to 0 \text{ per } r \to 0.$$

Entrambe queste relazioni valgono per $t \in J$, J intorno di t_0.
Sostituendo la seconda nella prima, otteniamo

$$f(\underline{g}(t)) = f(\underline{g}(t_0)) + \langle \nabla f(\underline{g}(t_0)), \underline{g}'(t_0) \rangle_N (t-t_0) +$$

$$+ \Big\{ \langle \nabla f(\underline{g}(t_0)), \underline{w}_0(t-t_0) \rangle_N \, |t-t_0| +$$

$$+ |\underline{g}'(t_0)(t-t_0) + |t-t_0|\,\underline{w}_0(t-t_0)| \; \omega\big(|\underline{g}'(t_0)(t-t_0) + |t-t_0|\,\underline{w}_0(t-t_0)|\big) \Big\},$$

e tutta la funzione fra parentesi graffe è della forma

$$|t-t_0|\, \omega_1(t-t_0), \quad \text{con} \quad \lim_{r \to 0} \omega_1(r) = 0.$$

Perciò $f(\underline{g}(t))$ è derivabile in t_0 e si ha la tesi. $\square$

Esempio: sia $f(x,y) = e^{-x^2 y}$, sia $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Si ha

$$f(\underline{g}(t)) = e^{-\cos^2 t \sin t}.$$

Poiché

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2 y} (-2xy, -x^2)$$

$$\underline{g}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

si ha

$$\langle \nabla f(\underline{g}(t)), \underline{g}'(t) \rangle_2 = e^{-\cos^2 t \sin t} \left\langle \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ -\cos^2 t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle_2 =$$

$$= e^{-\cos^2 t \sin t} (2\cos t \sin^2 t - \cos^3 t).$$

Si poteva derivare direttamente:

$$\frac{d}{dt} e^{-\cos^2 t \sin t} = e^{-\cos^2 t \sin t} \left[+2\cos t \sin^2 t - \cos^3 t \right],$$

e si ritrova lo stesso risultato.

Vediamo ora il caso generale.

<u>Teorema</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $B \subseteq \mathbb{R}^p$ aperti; sia $\underline{g} : B \to A$ una funzione vettoriale differenziabile in $\underline{x}_0 \in B$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $\underline{g}(\underline{x}_0) \in A$. Allora la funzione composta $(f \circ g)(\underline{x}) = f(\underline{g}(\underline{x}))$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ e

$$D_j (f \circ g)(\underline{x}_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(\underline{g}(\underline{x})) \right]_{\underline{x} = \underline{x}_0} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\underline{g}(\underline{x}_0)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0), \quad j = 1, \ldots, p,$$

ossia, indicando con $D\underline{g}(\underline{x}_0)$ la matrice $N \times p$

$$D\underline{g}(\underline{x}_0) = \left\{ \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \right\}_{\substack{k = 1 \ldots N \\ j = 1 \ldots p}},$$

e pensando il vettore $\nabla (f \circ g)(\underline{x}_0)$ come vettore-riga, esso si ottiene dal prodotto della riga $\nabla f(\underline{g}(\underline{x}_0))$ per le p colonne della matrice $D\underline{g}(\underline{x}_0)$.

Quindi, per ogni $\underline{h} \in \mathbb{R}^p$ risulta

$$\langle \nabla (f \circ \underline{g})(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle_p = \langle \nabla f(\underline{g}(\underline{x}_0)), D\underline{g}(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} \rangle_N .$$

<u>dim</u>. Omessa (si noti comunque che la prima formula scritta è la stessa del teorema precedente; se si deriva rispetto a una variabile x_j, è come derivare rispetto a t!). $\square$