Altri esercizi:

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2-9n+20}\right)^{2n-1}$, $\lim_{n\to\infty}\left(n^{\sqrt{n}}-2^n\right)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n-2}-(n-2)^n}{4\cdot n^n+3\cdot n!}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\ln\frac{(n+5)!}{n!+5}$

Massimo limite e minimo limite

Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Un numero $M\in\mathbb{R}$ è un maggiorante definitivo per $\{a_n\}$ se esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che $a_n\le M$ per ogni $n\ge\nu$. Un numero $m\in\mathbb{R}$ è un minorante definitivo per $\{a_n\}$ se esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che $a_n\ge m$ per ogni $n\ge\nu$.

Definizione Il massimo limite della successione $\{a_n\}$ è

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf\{M\in\mathbb{R}: M \text{ è maggiorante definitivo per } \{a_n\}\}, & \text{se tale insieme non è vuoto;} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ non ha maggioranti definitivi.} \end{cases}$$

Il minimo limite della successione $\{a_n\}$ è

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{m\in\mathbb{R}: m \text{ è minorante definitivo per } \{a_n\}\} & \text{se tale insieme non è vuoto;} \\ -\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ non ha minoranti definitivi.} \end{cases}$$

Osservazioni: (1) $\min\lim_{n\to\infty} a_n \le \max\lim_{n\to\infty} a_n$.

(2) Si ha $L=\min\lim_{n\to\infty} a_n = \max\lim_{n\to\infty} a_n \iff \exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$.

3) Vale $\max\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} a_k$, $\min\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} a_k$.

Esempi:

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} (-1)^n = -1, \quad \operatorname*{maxlim}_{n\to+\infty} (-1)^n = 1,$$

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} n(-1)^n = -\infty, \quad \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} n(-1)^n = +\infty$$

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname*{maxlim}_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Esercizio Se $a_n \le b_n$ definitivamente, allora

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n \le \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} b_n, \quad \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n \le \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} b_n.$$

Esercizio. Si ha $L = \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n \iff$

(i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < L + \varepsilon \ \forall n \ge \nu$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ esistono infiniti indici n tali che $a_n > L - \varepsilon$.

Similmente, si ha $\ell = \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n \iff$

(i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > \ell - \varepsilon \ \forall n \ge \nu$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ infiniti indici n tali che $a_n < \ell + \varepsilon$.

Esercizio

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n + \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} b_n \le \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} (a_n + b_n),$$

$$\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n + \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} b_n.$$

Successioni per ricorrenza

Una successione può essere definita a passo a passo, induttivamente:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \in \mathbb{R} & (\text{oppure } \lambda \in \mathbb{C}), \\ a_{n+1} = f(a_n) & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ove f è una funzione reale assegnata.

Esempi (1)

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n & , \forall n \in \mathbb{N}: \end{cases}$$

[questa successione non è altro che $a_n = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2)
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} & \forall n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

[qui $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{3}$, $a_4 = \frac{8}{5}$, $a_5 = \frac{13}{8}$, ma non è facile trovare una espressione esplicita di a_n.

Le successioni per ricorrenza sono le più difficili da studiare. Se avremo tempo, le studieremo quando avremo studiato le funzioni reali di variabile reale, perché le proprietà di tali successioni (monotonia, limitatezza, convergenza o non convergenza) dipendono, come è facile immaginare, dalla funzione f che le determina.

Esercizio. Sia $\{a_n\}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda > 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + 1} & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Provare che $a_n \in]0, \frac{1}{2}[$ per ogni $n \geq 1$, che $\{a_n\}$ è decrescente e che la successione converge a 0.