Il numero π

Definiamo una nozione di area per i <u>poligoni</u> di $\mathbb{R}^2$, cioè i <u>triangoli</u> (regione delimitata da 3 punti distinti e dai 3 segmenti che li uniscono) e le unioni finite di triangoli <u>adiacenti</u> (due triangoli sono adiacenti se hanno un lato in comune).

Detta $\mathcal{P}$ la famiglia di tutti i poligoni, l'<u>area</u> è una funzione $a: \mathcal{P} \to [0,\infty[$, tale che:

(i) se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ e $P_1 \subseteq P_2$ allora $a(P_1) \leq a(P_2)$ [monotonia],

(ii) se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ e sono <u>congruenti</u> (cioè P_2 si ottiene da P_1 con una rototraslazione del piano) allora $a(P_1) = a(P_2)$ [invarianza per congruenze],

(iii) se $P = P_1 \cup P_2$ con $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, disgiunti e adiacenti (cioè con uno o più lati in comune, ma nessun punto interno comune), allora $a(P) = a(P_1) + a(P_2)$ [additività],

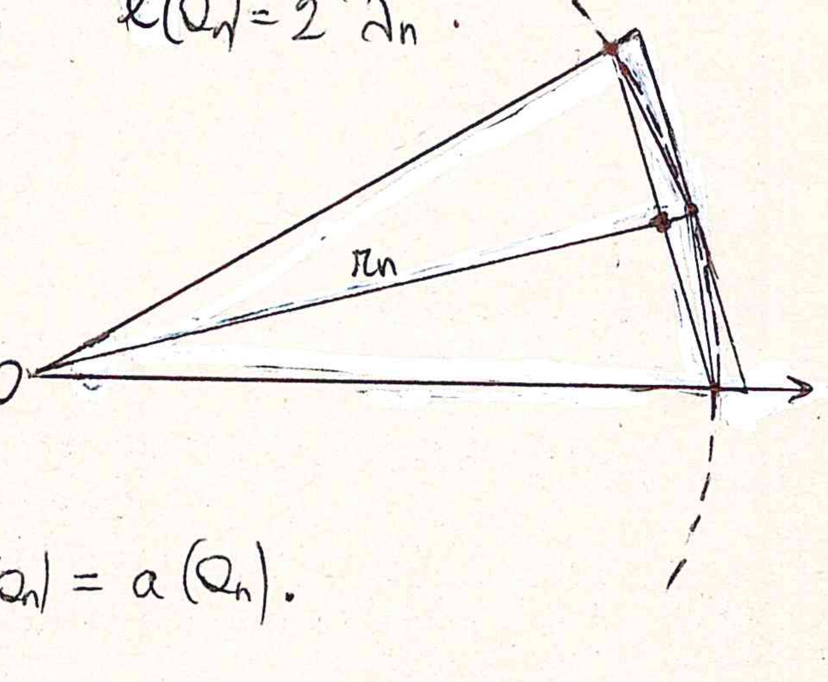
(iv) se P è un triangolo di base b e altezza h, allora
$$a(P) = \frac{bh}{2}.$$

Conseguenze della definizione: i rettangoli e i parallelogrammi di base b e altezza h hanno area uguale a bh; i trapezi con basi b_1 e b_2 e altezza h hanno area $\frac{(b_1+b_2)h}{2}$.

Consideriamo adesso la famiglia $\mathcal{R}$ dei <u>poligoni regolari</u>, cioè quelli che hanno tutti i lati uguali e sono inscrivibili in un cerchio.

Per ogni $n \geq 2$, sia P_n il poligono regolare di 2^n lati inscritto nel cerchio $B(0,1)$, e sia Q_n il poligono regolare di 2^n lati circoscritto al cerchio $B(0,1)$. Possiamo supporre che un vertice di P_n sia il punto $(1,0)$ e un vertice di Q_n sia $(1+\varepsilon_n, 0)$ con un opportuno $\varepsilon_n > 0$. Siano ℓ_n e λ_n le lunghezze di ciascun lato di P_n e di Q_n. Il perimetro di P_n e Q_n (cioè la somma delle lunghezze dei lati) sarà allora

$$\ell(P_n) = 2^n \ell_n, \qquad \ell(Q_n) = 2^n \lambda_n .$$



Per le aree si avrà

$$a(P_n) = 2^n \frac{\ell_n r_n}{2},$$

$$a(Q_n) = 2^n \frac{\lambda_n}{2},$$

da cui

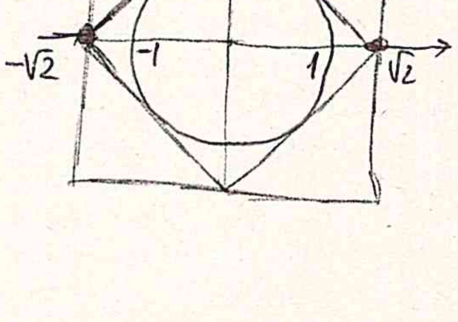
$$a(P_n) < \frac{1}{2} \ell(P_n) < \frac{1}{2} \ell(Q_n) = a(Q_n).$$

Inoltre

$$a(P_n) \leq a(Q_k) \quad \forall n, k \geq 2.$$

Poichè $Q_n \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

si ha $a(Q_n) \leq 8$ per ogni $n \geq 2$.



Perciò

$$\ell_n \leq \lambda_n \leq \frac{8}{2^{n-1}},$$

e infine osserviamo che

$$a(P_{n+1}) = 2^{n+1} \frac{\ell_n}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ell(P_n).$$

Da tutto ciò ricaviamo la fondamentale relazione

$$\frac{1}{2}\sup_{n\geq 2} \ell(P_n) = \sup_{n\geq 2} a(P_n) \leq \inf_{n\geq 2} a(Q_n) = \frac{1}{2}\inf_{n\geq 2} \ell(Q_n).$$

Ma poiché

$$a(Q_n) - a(P_n) = 2^n \frac{\ell_n + \ell_n}{2}\frac{(1-r_n)}{2} \leq 4(1-r_n) =$$

$$= 4\left(1-\sqrt{1-\frac{\ell_n^2}{4}}\right) = 4\,\frac{\frac{\ell_n^2}{4}}{1+\sqrt{1-\frac{\ell_n^2}{4}}} < \ell_n^2 \leq \frac{64}{2^{2(n-1)}},$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}\sup_{n\geq 2} \ell(P_n) = \sup_{n\geq 2} a(P_n) = \inf_{n\geq 2} a(Q_n) = \frac{1}{2}\inf_{n\geq 2} \ell(Q_n).$$

<u>Definizione</u> $\pi := \sup_{n\geq 2} a(P_n) = \inf_{n\geq 2} a(Q_n)$. (si ha $2<\pi<4$).

Ne segue anche

$$2\pi = \sup_{n\geq 2} \ell(P_n) = \inf_{n\geq 2} \ell(Q_n).$$

Dato che

$$P_n \subseteq B(0,1) \subseteq Q_n \quad \forall n\geq 2$$

è naturale definire

$$a(B(0,1)) := \pi.$$

ed anche

$$\ell(\partial B(0,1)) = 2\pi,$$

ove

$$\partial B(0,1) = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}.$$

Misure degli angoli

Si definisce 2π la misura dell'angolo giro, π quella dell'angolo piatto, $\frac{\pi}{2}$ quella dell'angolo retto. Via via dimezzando si costruiscono gli angoli di ampiezza $\frac{\pi}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, e poi, per somme, quelli di ampiezza $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}$ (in verso antiorario).

I numeri della forma $\frac{k}{2^n}$, con $k, n \in \mathbb{N}$, sono densi in $\mathbb{R}^+$ (i reali positivi). Allora se $0 < \alpha < 2\pi$ poniamo

$$A = \left\{ r = \frac{k}{2^n}\pi : k, n \in \mathbb{N}, \ r < \alpha \right\}, \quad B = \left\{ r = \frac{k}{2^n}\pi : k, n \in \mathbb{N}, \ r > \alpha \right\};$$

A e B sono non vuoti e separati e si ha $\alpha = \sup A = \inf B$.

Detti γ_r e S_r l'arco di $\partial B(0,1)$ e il settore del cerchio $B(0,1)$ che sottendono l'angolo di ampiezza r, poniamo

$$S_\alpha = \bigcup_{r \in A} S_r, \qquad \gamma_\alpha = \bigcup_{r \in A} \gamma_r ;$$

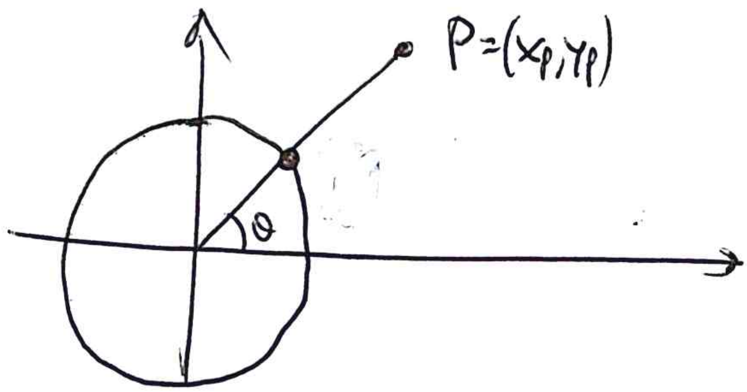
diremo che il settore S_α e l'arco γ_α sottendono un angolo di ampiezza α.

In questo modo abbiamo definito gli angoli fra 0 e 2π in verso antiorario. Possiamo definire un qualunque angolo $\alpha > 0$, modulo 2π: se $2\pi h \le \alpha < 2\pi(h+1)$ ($h \in \mathbb{N}$), diremo che $S_\alpha := S_{\alpha - 2h\pi}$ e $\gamma_\alpha := \gamma_{\alpha - 2h\pi}$. Gli angoli negativi si definiscono ripetendo la procedura in verso orario, oppure ancora modulo 2π: se $2\pi h \le \alpha < 2\pi(h+1)$ ($h \in \mathbb{Z}$), diremo che $S_\alpha := S_{\alpha - 2h\pi}$ e $\gamma_\alpha := \gamma_{\alpha - 2h\pi}$.

E ora possiamo definire seno e coseno.

Def. $\sin\theta = \dfrac{y_P}{\sqrt{x_P^2+y_P^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{x_P}{\sqrt{x_P^2+y_P^2}}$,

ove $P=(x_P,y_P) \neq O$ è un punto del piano.



Così $\sin\theta$ e $\cos\theta$ sono definiti in $[-\pi,\pi]$, ma li estendo con periodicità 2π perché posso far ruotare P infinite volte.

Perciò $\cos(\theta+2k\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta+2k\pi) = \sin\theta$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$

Inoltre:

$|\cos\theta| \leq 1$, $|\sin\theta| \leq 1$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$,

$\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$

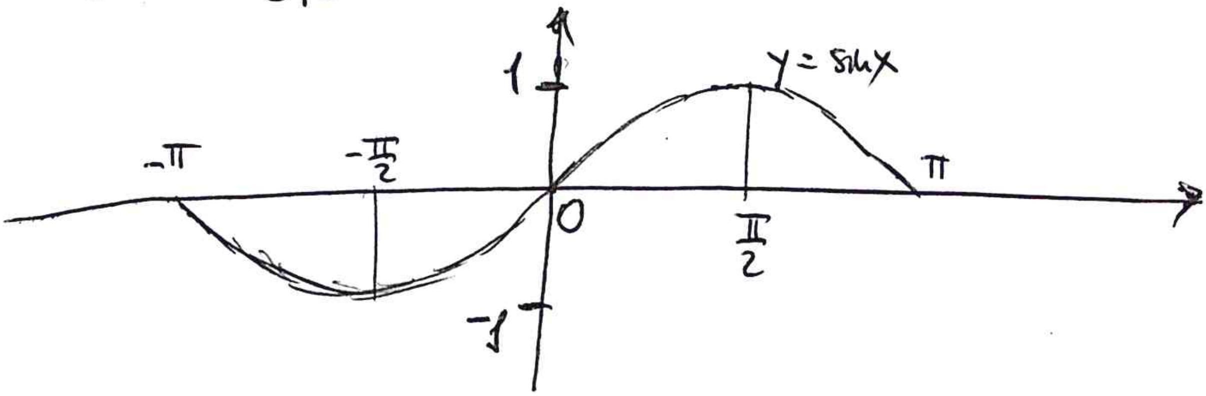
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$

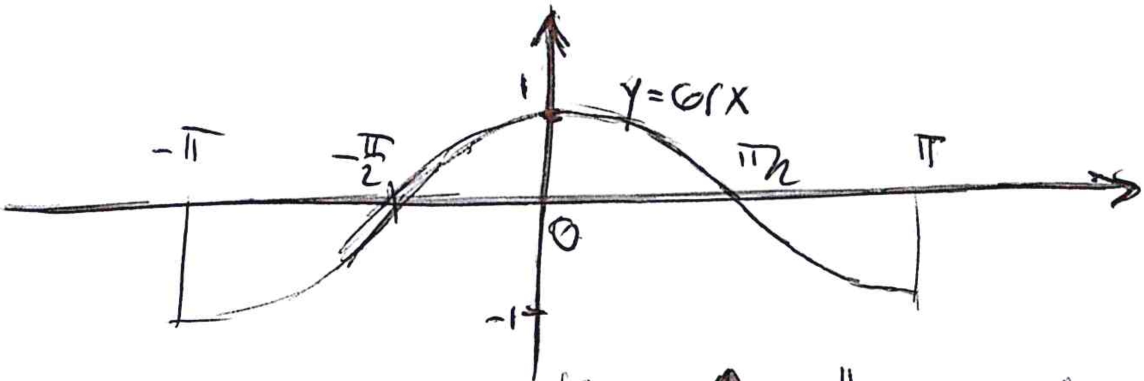
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$

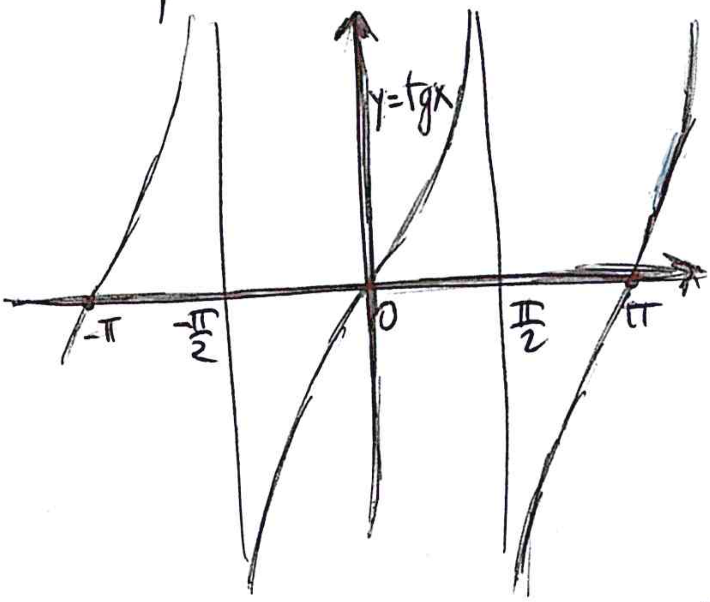
- $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

Poi si definisce la <u>tangente</u>:

- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad \forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

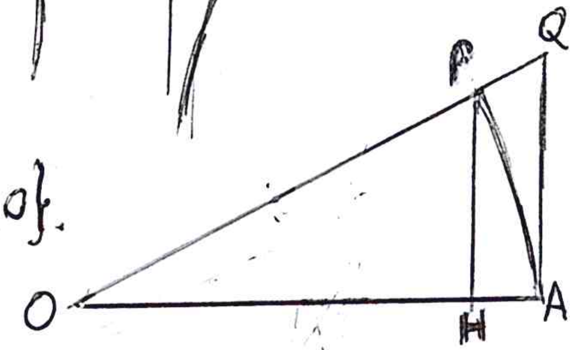






<u>Proposizione</u>: si ha

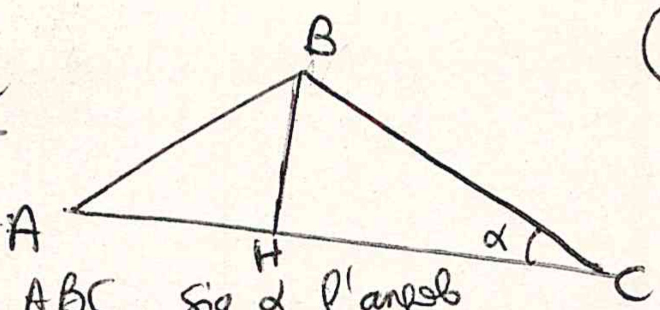
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}.$$



<u>dim.</u> $\overset{\triangle}{OAP} \subseteq \overset{\frown}{OAP} \subseteq \overset{\triangle}{OAQ}$, cioè

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad \square$$

Seno e coseno in coordinate



Teo. [Carnot] In un triangolo ABC, sia α l'angolo opposto ad AB. Allora

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AC}\;\overline{BC}\cos\alpha .$$

dim Sia H la proiezione ortogonale di B su AC. Per il teorema di Pitagora

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 ,$$

Ma

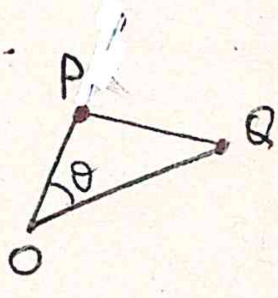
$$\begin{cases} \overline{AH} = \overline{AC} - \overline{CH} = \overline{AC} - \overline{BC}\cos\alpha \\ \overline{BH} = \overline{BC}\sin\alpha \end{cases}$$

e dunque

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\cos^2\alpha - 2\overline{AC}\;\overline{BC}\cos\alpha + \overline{BC}^2\sin^2\alpha =$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\;\overline{BC}\cos\alpha . \ \square$$

Corollario Dati $P, Q \in \mathbb{R}^2$, sia θ l'angolo $O\hat{P}Q$.



Allora

$$\cos\theta = \frac{x_P x_Q + y_P y_Q}{|P|\,|Q|}$$

dim. Per il teorema di Carnot

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,\overline{OP}\;\overline{OQ}\cos\theta ,$$

quindi

$$-\cos\theta = \frac{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 - x_P^2 - y_P^2 - x_Q^2 - y_Q^2}{2\,|P|\,|Q|} = \frac{-2(x_P x_Q + y_P y_Q)}{2|P||Q|} . \ \square$$

<u>Corollario</u> Sia θ l'angolo convesso (cioè $0 \le \theta \le \pi$) fra P e Q. Allora

$$\sin\theta = \frac{|x_P y_Q - y_P x_Q|}{|P|\,|Q|}.$$

<u>dim</u>. Si ha

$$|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{|P|^2|Q|^2 - (x_P x_Q + y_P y_Q)^2}}{|P|\,|Q|} =$$

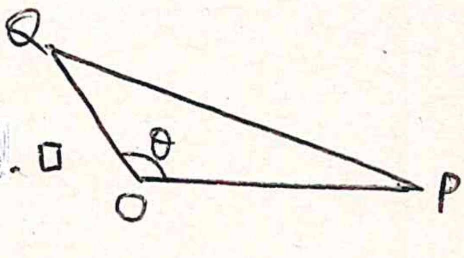
$$= \frac{1}{|P||Q|}\sqrt{(x_P^2+y_P^2)(x_Q^2+y_Q^2) - x_P^2 x_Q^2 - y_P^2 y_Q^2 - 2x_P x_Q y_P y_Q} =$$

$$= \frac{1}{|P||Q|}\sqrt{x_P^2 y_Q^2 + y_P^2 x_Q^2 - 2x_P x_Q y_P y_Q} = \frac{|x_P y_Q - y_P x_Q|}{|P||Q|}.$$

Poiché $0 \le \theta \le \pi$, $\sin\theta \ge 0$, e dunque si ha la tesi. □

<u>Corollario</u> Se $P, Q \in \mathbb{R}^2$, l'area del triangolo OPQ è

$$\frac{1}{2}|x_P y_Q - y_P x_Q|.$$



<u>dim</u>. La base è $|P|$, l'altezza è $|Q|\sin\theta$. □

<u>Corollario</u> Se $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, l'area del triangolo RPQ è

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_P - x_R & x_Q - x_R \\ y_P - y_R & y_Q - y_R \end{pmatrix}\right|.$$

<u>dim</u>. Infatti RPQ è il traslato di $O(P-R)(Q-R)$, e la tesi segue dal corollario precedente. □