

Prefazione

L'unico modo davvero efficace per imparare la matematica è *fare* della matematica. Seguire le lezioni o leggere il libro di testo non basta; bisogna sedersi davanti a un foglio bianco e tentare di risolvere da soli i problemi. Soltanto così si può capire perché vengono scelti certi ragionamenti invece di altri — e magari si può iniziare a intuire come costruirne di nuovi da soli.

Per fare della matematica, almeno all'inizio, sono necessari degli esercizi. Questi, se possibile, devono essere scelti in modo da sviluppare l'abilità sia nell'uso delle tecniche di calcolo che nella costruzione dei ragionamenti teorici; devono fornire algoritmi per risolvere classi di problemi, ma devono anche invitare lo studente a *pensare* a quello che sta facendo, in modo da evitare perniciosi approcci a macchinetta che non solo spesso non funzionano, ma talvolta portano persino a risultati sbagliati. E possono anche esservi esercizi che indicano nuovi metodi per risolvere vecchie questioni, o che suggeriscono ulteriori sviluppi sia teorici che pratici.

In questo eserciziario abbiamo provato a fare tutto ciò. Per riuscirvi, abbiamo deciso di fornire sia esempi svolti, con soluzioni complete, sia esercizi proposti (le cui soluzioni sono riportate alla fine del volume). Le soluzioni degli esempi sono state scritte con l'intento di chiarire *perché* viene scelta una certa strada fra le tante possibili per risolvere il problema. La nostra speranza è che lo studente, esaminando gli esempi svolti e affrontando di persona gli esercizi proposti, riesca a distillare i metodi con cui individuare il modo migliore per giungere alla soluzione, imparando ad affrontare gli esercizi valutando i vari approcci possibili per poi scegliere con cognizione di causa quello più adatto.

La suddivisione degli argomenti segue fedelmente quella del testo *Geometria* già pubblicato da questa casa editrice. Per facilitare la comprensione dei problemi (e relative soluzioni), e per favorire un uso autonomo dell'eserciziario da parte dello studente, ogni capitolo contiene brevi richiami di teoria, comprendenti le definizioni e i risultati principali. Non bisogna però pensare che questi richiami bastino anche a *risolvere* gli esercizi; per trovare il modo corretto di procedere spesso occorre avere presente anche la *dimostrazione* dei risultati che si vogliono usare, in quanto essa può fornire un modello generale da seguire nel caso particolare.

Gli esempi svolti vogliono essere una rassegna rappresentativa delle tecniche necessarie per affrontare problemi legati agli argomenti del capitolo. Pur avendo

privilegiato prevalentemente l'aspetto computazionale, sono presenti anche esempi di tipo più teorico, che spesso introducono ulteriori strumenti utili per la risoluzione dei problemi affrontati. Sono stati inclusi anche alcuni esempi ed esercizi relativi ad argomenti trattati nei complementi del libro di testo, in modo da permettere al docente la massima flessibilità nella costruzione del programma del corso.

Le soluzioni degli esercizi proposti sono raccolte alla fine del libro, e devono essere consultate il più tardi possibile. Infatti, è assolutamente fondamentale che *prima* di guardare la soluzione lo studente provi da solo a risolvere l'esercizio; e soltanto dopo aver trovato una qualche risposta la potrà confrontare con quella proposta. Guardare subito la soluzione senza tentare di trovarla autonomamente vanifica completamente l'utilità dell'esercizio. Occorre inoltre attenzione nel confronto: alcuni esercizi (per esempio quelli in cui si chiede di determinare una base di un sottospazio vettoriale) non hanno un'unica soluzione, ma infinite, tutte giuste. E infinite soluzioni sbagliate. Per cui anche una soluzione diversa da quella indicata, se non vi sono errori nel procedimento usato, potrebbe essere corretta. Per verificarlo (o smentirlo...) occorre allora dimostrare che le due soluzioni sono compatibili (per esempio, facendo vedere che le due basi si ottengono l'una dall'altra tramite combinazioni lineari), risolvendo di fatto un ulteriore esercizio. Questo si applica a maggior ragione agli esercizi di tipo teorico, le cui soluzioni proposte sono spesso solo una traccia che va comunque completata dallo studente.

Di norma, per risolvere gli esercizi di un capitolo sono sufficienti le tecniche presentate in quel capitolo e nei capitoli precedenti. L'unica eccezione riguarda i numeri complessi: alcuni esercizi (tipicamente sui sistemi lineari) li utilizzano prima che vengano introdotti ufficialmente nel Capitolo 11, con lo scopo di sottolineare la sostanziale identità delle teorie dei sistemi lineari e degli spazi vettoriali sui numeri reali con le analoghe teorie sui numeri complessi. Per questo motivo nelle definizioni e nei risultati useremo spesso il simbolo \mathbb{K} per indicare indifferentemente l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali o l'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi.

Questo libro si conclude con due capitoli particolari. Il primo contiene una serie di domande molto semplici, il cui scopo è aiutare lo studente a verificare la propria comprensione delle nozioni di base; non riuscire a rispondere a diverse di queste domande è un sicuro segnale di preparazione insufficiente. L'ultimo capitolo, infine, contiene alcune applicazioni degli argomenti studiati ad ambiti non prettamente matematici, in modo da mostrare con esempi concreti (tratti dalla fisica, dall'ingegneria, dalla chimica e dall'economia) l'importanza e l'utilità della Geometria.

Ed è giunto il momento dei ringraziamenti finali. È un piacere avere la possibilità di dichiarare pubblicamente che senza Welleda Baldoni, Adele Manzella, Mauro Nacinovich, Carlo Petronio, Andrea Spiro, Roberto Tauraso, Nicola Telesman e Calogero Tinaglia questo testo sarebbe stato sicuramente peggiore; e senza Chiara Tartara e lo staff della McGraw-Hill Libri Italia non sarebbe proprio esistito. Un ringraziamento particolare va a Paolo Caressa, per essersi preso la briga di ricontrollare pazientemente la soluzione di tutti gli esercizi. Infine, vogliamo dedicare quest'opera a Donatella Calabrò.

Marco Abate
Chiara de Fabritiis