C

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 3 FEBBRAIO 2011

1.
1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e avente periodo 8.
1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia insieme immagine $[-1,+\infty[$.
1.3 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e discontinua in x = 0.

2. Riconoscere quante soluzioni ha l'equazione:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=e^x$$

Si tratta di riconoscere quante intersezioni hanno i grafici delle funzioni $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ e $g(x)=e^x$.
Il grafico della funzione *g* lo conosciamo.
Vediamo di tracciare il grafico di f(x): naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
La funzione è definita su tutto R.
Vediamo segno e intersezioni con gli assi:

$$f(0)=-1$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=1 \;\; o \;\; x=-1$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+4}>0 \Leftrightarrow x<-1 \;\; o \;\; x>1$$

quindi non ci possono essere intersezioni nell'intervallo]-1, 1[, dato che la funzione g è sempre positiva.
Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

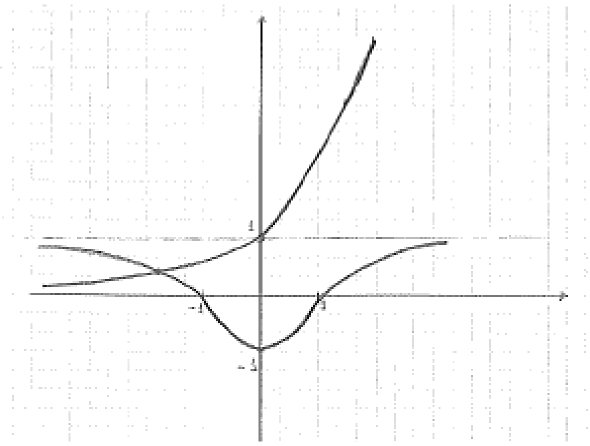
Studiamo la monotonia della funzione:

$$y'=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'>0 \Leftrightarrow x>0$$

Quindi y decresce fino a $x=0$ (punto di minimo relativo), e poi cresce.
A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:

C



I grafici si intersecano in un punto di ascissa $x_0<-1$: x_0 sarà l'unica soluzione dell'equazione data.

3. Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo [-1,3]. In caso affermativo trovare minimo e massimo assoluti della funzione.

$f(x) = x^2 e^{-x}$

Bisogna dimostrare che la funzione è continua nell'intervallo chiuso [-1,3]. In effetti la funzione è continua come prodotto delle funzioni continue x^2 e e^{-x} (che è continua ad esempio come quoziente di funzioni continue).

Il minimo e il massimo assoluti sono rispettivamente il valore più piccolo e quello più grande fra i valori assunti agli estremi e le ordinate di eventuali punti di massimo o minimo relativi.

Calcoliamo i valori agli estremi:

$f(-1) = e$

$f(3) = 9e^{-3}$

Cerchiamo eventuali punti di massimo o minimo relativi nell'intervallo dato.

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

$f'(x) > 0$ per $0 < x < 2$

Quindi f decresce da -1 a 0, cresce da 0 a 2, decresce da 2 a 3.

Perciò 0 è punto di minimo relativo e 2 è punto di massimo relativo.

$f(0) = 0$

$f(2) = 4e^{-2}$

Il minimo fra i valori trovati è 0, e il massimo è *e*.

4. Trovare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione f e dall'asse x, nell'intervallo [0, 1]:

$$f(x) = \frac{3}{e^x - 3}$$

La funzione è positiva quando $e^x - 3 > 0$, cioè quando $x > \log 3$. Quindi nell'intervallo [0, 1] la funzione è negativa, e l'area sarà data da:

$$-\int_0^1 \frac{3}{e^x - 3}dx = \int_0^1 \frac{3}{3 - e^x}dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{3}{3 - e^x}\,dx$$

Con la sostituzione $e^x = t$ otteniamo:

C

$$\int \frac{3}{3-e^x}dx = \int \frac{3}{3-t}\frac{1}{t}dt$$

$$\frac{3}{(3-t)t} = \frac{A}{3-t} + \frac{B}{t}$$

$$3 = At + B(3-t)$$

$3 = t(A-B) + 3B$ da cui si ricava:

$$B = A = 1$$

Quindi:

$$\int \frac{3}{3-t}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{3-t}dt + \int \frac{1}{t}dt = \log|3-t| + \log|t| + k = \log|3-e^x| + x + k$$

Calcoliamo ora l'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{3}{3-e^x}dx = \left[\log(3-e^x) + x\right]_0^1 = \log(3-e) + 1 - \log 2$$