B

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 3 FEBBRAIO 2011

1.

1.1 Fare l’esempio di una funzione definita su tutto R e avente asintoto orizzontale la retta y= - 3.
1.2 Fare l’esempio di una funzione definita su tutto R che abbia insieme immagine $]-2,+\infty[$.
1.3 Fare l’esempio di una funzione definita su tutto R e non continua in x = -3.

2. Riconoscere quante soluzioni ha l’equazione:

$\sqrt[3]{1-x^2} = e^x - 1$

Si tratta di riconoscere quante intersezioni hanno i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ e $g(x) = e^x - 1$.

Il grafico della funzione *g* lo conosciamo.
Vediamo di tracciare il grafico di f(x): naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
La funzione è definita su tutto R ed è pari. Vediamo segno e intersezioni con gli assi:

$f(0) = 1$

$\sqrt[3]{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \;\; o \;\; x = -1$

$\sqrt[3]{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Vediamo i limiti:

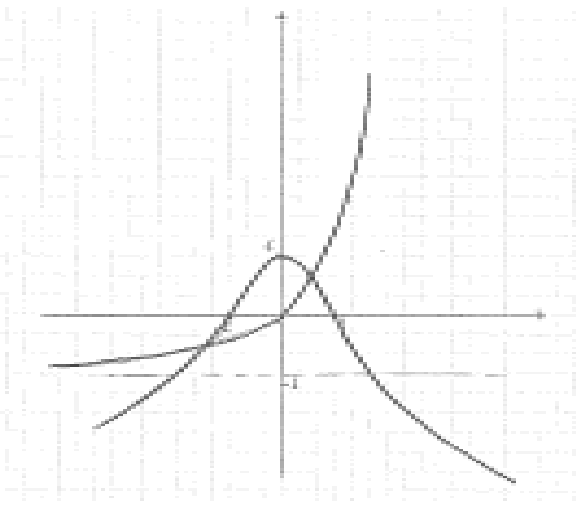
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^2} = -\infty = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1-x^2}$

Studiamo la monotonia della funzione:

$$y' = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

$y' > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Quindi y cresce fino a $x = 0$ (punto di massimo relativo), e poi decresce.
A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:



I grafici si intersecano in due punti di ascissa x_0 e x_1 che saranno le due soluzioni dell’equazione data.

B

3. Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,\frac{1}{2}]$. In caso affermativo trovare un punto x_o che ha le proprietà descritte nell'enunciato.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente:
Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b]. Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Le prime due ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].
La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto quoziente di funzioni derivabili (e continue).
Quindi dobbiamo trovare x_0 tale che:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}}$$

$$f(0)=-2$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{5}{2}$$

Quindi dobbiamo trovare x_0 tale che:

$$f'(x_0)=\frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}}=2(-\frac{5}{2}+2)=-1$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione:

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=-1$$

$$x^2-2x=-x^2+2x-1$$
$$2x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_0=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B

4. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \sin x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \sin x dx$$

$$\log|y| = -\cos x + C$$

$$|y| = e^{-\cos x} e^{C}$$

$y = Ke^{-\cos x}$ $K \neq 0$ integrale generale

$y(\frac{\pi}{2}) = 1$ quindi: $ke^{-\cos\frac{\pi}{2}} = 1$ cioè $k = 1$

Otteniamo la soluzione:

$$y = e^{-\cos x}$$