A

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 3 FEBBRAIO 2011

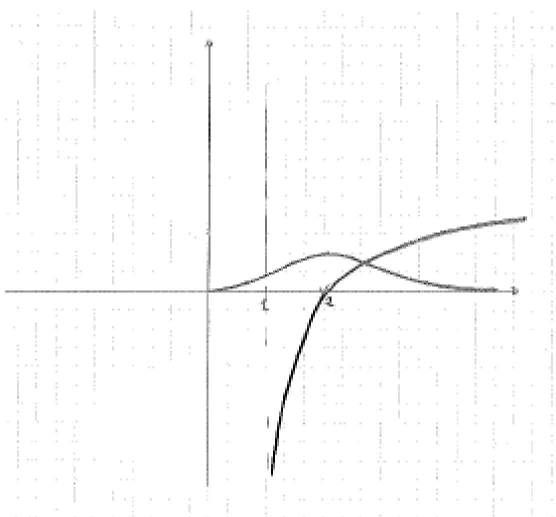
1.
1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e avente asintoto verticale x = 3.
1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia insieme immagine [2, 6].
1.3 Fare l'esempio di una funzione non definita in x = 2 ma prolungabile con continuità a tale punto.

2. Riconoscere quante soluzioni ha l'equazione:
$x^2 e^{-x} - \log(x-1) = 0$
Si tratta di riconoscere quante intersezioni hanno i grafici delle funzioni $f(x) = x^2 e^{-x}$ e $g(x) = \log(x-1)$.
Il grafico della funzione *g* lo conosciamo. E' definita per x>1, quindi eventuali soluzioni le cercheremo in tale intervallo.
Vediamo di tracciare il grafico di f(x): naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano). In particolare non ci interessa solo per $x < 0$.
Vediamo segno e intersezioni con gli assi:
$f(0) = 0$
$f(x) > 0$ per $x \neq 0$
Vediamo i limiti:
$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$
Studiamo la monotonia della funzione:

$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

$y' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Quindi y cresce da $x = 0$ a $x = 2$ (punto di massimo relativo, $f(2) = 4e^{-2}$), e poi decresce.
A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni nella parte di piano che ci interessa:



I grafici si intersecano in un punto di ascissa x_0>2: x_0 sarà l'unica soluzione dell'equazione data.

A

3.
Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1,\frac{1}{2}]$. In caso affermativo trovare massimo e minimo assoluto della funzione.

$$f(x)=\begin{cases}\log\sqrt{1-x^2} & 0<x<1\\ \\ -x^2 & x\le 0\end{cases}$$

Bisogna dimostrare che la funzione è continua nell'intervallo chiuso $[-1,\frac{1}{2}]$. Per x<0 la funzione è continua (è un polinomio); per x>0 la funzione è continua come composizione di funzioni continue. Si tratta di controllare la continuità in x_0=0. In effetti f è continua in x_0=0 perché:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Infatti f(0)=0 e:

$$\lim_{x\to 0^*}\log\sqrt{1-x^2}=0=\lim_{x\to 0^-}(-x^2)$$

Il minimo e il massimo assoluti sono rispettivamente il valore più piccolo e quello più grande fra i valori assunti agli estremi e le ordinate di eventuali punti di massimo o minimo relativi.
Calcoliamo i valori agli estremi:

$$f(-1)=-1$$

$$f(\frac{1}{2})=\log\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cerchiamo eventuali punti di massimo o minimo relativi nell'intervallo dato.

$f'(x)=-2x$ per x<0

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$ x>0

La funzione cresce per x<0, decresce per x>0. In x=0 c'è un punto di massimo relativo.

$$f(0)=0$$

Quindi 0 è il massimo assoluto, e -1 è il minimo assoluto.

4. Trovare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione f e dall'asse x, nell'intervallo indicato:

$f(x)=x^2\cos x$ in $[0,\pi]$

Nell'intervallo dato la funzione è positiva quando $\cos x>0$, cioè quando $x<\frac{\pi}{2}$. Quindi l'area sarà data da:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\cos x dx$$

Calcolo l'integrale indefinito per parti:

A

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2\int x(-\sin x) dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C$$

Quindi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 - (-2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$$