A

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 9 FEBBRAIO 2010

1.

1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R e avente asintoto orizzontale y = -1.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x$$

$$f(x) = \frac{-x+6}{3+x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1$$

1.2

Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia insieme immagine]1, 6].
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = -\frac{10}{\pi}\arctan|x| + 6$$

1.3

Fare l'esempio di una funzione non definita in x=0 ma prolungabile con continuità a tale punto.
Ad esempio:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

2. Riconoscere quante soluzioni ha l'equazione:

$$\frac{x-2}{x^2+4} + \arctan x = 0$$

Possiamo riscrivere l'equazione così:

$$\frac{x-2}{x^2+4} = -\arctan x$$

Si tratta di riconoscere se e quante volte i grafici delle due funzioni si incontrano.
Il grafico di $-\arctan x$ lo conosciamo.
Vediamo di tracciare il grafico di $\frac{x-2}{x^2+4}$: naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
La funzione è definita su tutto R.
Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+4} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2+4}$$

Vediamo segno e intersezioni con gli assi:

$$\frac{x-2}{x^2+4} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

A

$$\frac{x-2}{x^2+4} > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

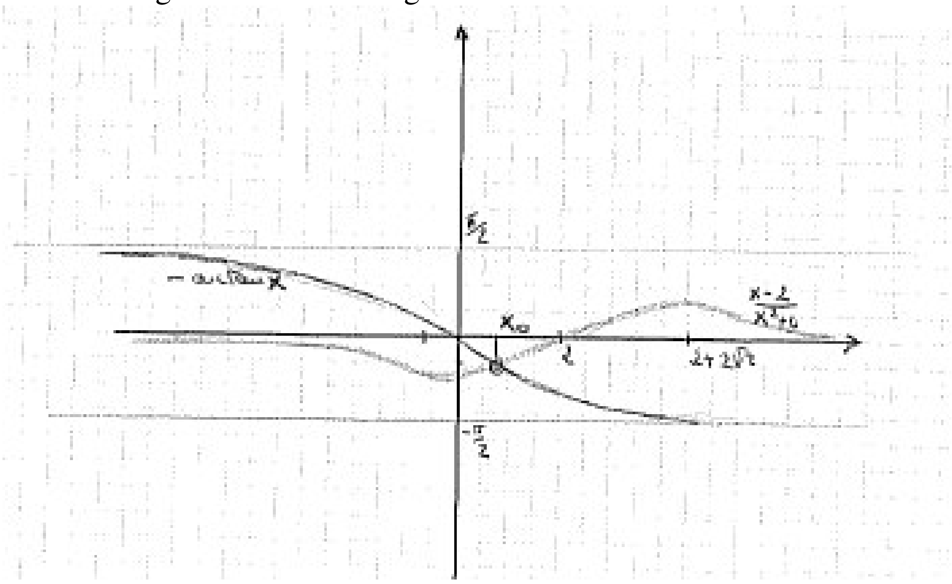
Studiamo la monotonia della funzione:

$$y' = \frac{x^2+4-2x(x-2)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2+4x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4x+4}{(x^2+4)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -x^2+4x+4 > 0 \Leftrightarrow 2-2\sqrt{2} < x < 2+2\sqrt{2}$$

Quindi y decresce fino a $x = 2-2\sqrt{2}$ (punto di minimo relativo), cresce da $x = 2-2\sqrt{2}$ a $x = 2+2\sqrt{2}$ (punto di massimo relativo), e quindi descresce.

A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:



I grafici si intersecano in un punto di ascissa x_0: x_0 sarà l'unica soluzione dell'equazione data.

3.

Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato. In caso affermativo trovare un punto xo che ha le proprietà descritte nell'enunciato.

$f(x) = (4x-3x^2)e^{-2x}$ in $[0, \frac{4}{3}]$

L'enunciato del teorema di Rolle è il seguente:

Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b], e f(a)=f(b). Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che $f'(x_0) = 0$

Le prime due ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].

La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili (e continue).

Controlliamo l'ipotesi: f(a)=f(b)

$f(0) = 0 = f(\frac{4}{3})$

A

Quindi dobbiamo trovare x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = (4-6x)e^{-2x} - 2e^{-2x}(4x-3x^2) = e^{-2x}(6x^2 - 14x + 4)$$

$$e^{-2x}(6x^2 - 14x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ oppure } x = \frac{1}{3}$$

Di questi due punti solo $x_0 = \frac{1}{3}$ appartiene all'intervallo dato.

4.
Trovare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione f e dall'asse x, nell'intervallo indicato:
$f(x) = (x-3)\log x$ in $[1, e]$

L'area coincide con l'integrale se la funzione è positiva, con l'opposto dell'integrale se la funzione è negativa. Si tratta quindi di riconoscere in quali sottointervalli dell'intervallo $[1, e]$ la funzione data è positiva / negativa.

$(x-3)\log x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ oppure $x > 3$
Quindi in $[1, e]$ la funzione è negativa. Perciò:

$$A = -\int_1^e (x-3)\log x dx$$

$$\int (x-3)\log x dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\log x - \int \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\frac{1}{x} dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\log x - \int \left(\frac{x}{2} - 3\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\log x - \frac{x^2}{4} + 3x + C$$

$$A = -\int_1^e (x-3)\log x dx = -\left[\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\log x - \frac{x^2}{4} + 3x\right]_1^e = -\frac{e^2}{4} + \frac{11}{4}$$