B

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 21 GENNAIO 2010

1.

1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia minimo 0 e massimo 3.

Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x)=\frac{3}{2}\sin x+\frac{3}{2}$$

1.2 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia come asintoto orizzontale la retta y=5.

Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+5$$

1.3 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia come insieme immagine]0,1].

Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\arctan|x|+1$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(\arctan x+\frac{\pi}{2}) & x<0\\ \frac{2}{\pi}(\arctan(-x)+\frac{\pi}{2}) & x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$$

2. Risolvere graficamente l'equazione:

$$e^{\frac{1}{x}}=x$$

Si tratta di riconoscere se e quante volte i grafici delle due funzioni si incontrano.
Il grafico di $f(x)=x$ lo conosciamo.

Vediamo di tracciare il grafico di $e^{\frac{1}{x}}$: naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).
Il dominio è:

B

$X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Vediamo i limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

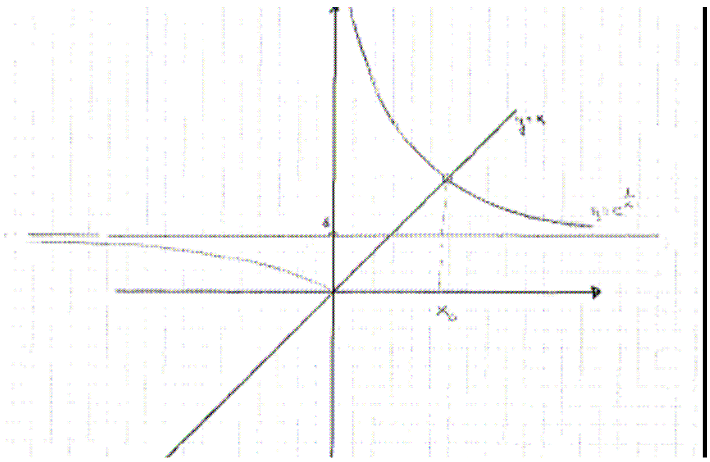
$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Studiamo la monotonia della funzione:

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

Quindi y' è negativa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$, perciò in ognuno dei due intervalli la funzione è decrescente.

A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:



I grafici si intersecano in un punto di ascissa x_0: x_0 sarà l'unica soluzione dell'equazione data.

3. Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo indicato. In caso affermativo trovare un punto x_o che ha le proprietà descritte nell'enunciato.

$f(x) = \log x^2$ in [1, e]

L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente:

Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b]. Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].

La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto composizione di funzioni derivabili e continue.

Cerchiamo quindi x_0 appartenente a]1, e [:

B

$$f'(x_0) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{2 - 0}{e - 1} = \frac{2}{e - 1}$$

Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2}{x}$$

Quindi dobbiamo cercare x tale che:

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{e - 1}$$

otteniamo:

$$x = e - 1$$

4.

4.1 $\int \frac{1}{x^2} \log x dx$

Integriamo per parti, prendendo log x come fattore finito:

$$\int \frac{1}{x^2} \log x dx = -\frac{1}{x} \log x - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \log x - \frac{1}{x} + C$$

4.2 $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$

4.3 $\int tg^2 x dx = \int (tg^2 x + 1 - 1) dx = \int (tg^2 x + 1) dx - \int dx = tgx - x + C$

Oppure si poteva risolvere per sostituzione, ponendo *tg x*=*t* .