A

A

SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA - MODULO I
PROVA SCRITTA DEL 21 GENNAIO 2010

1.
1.1 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R che abbia come insieme immagine]0,5[.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \frac{5}{\pi}\arctan x + \frac{5}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{\pi}|\arctan x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

1.2 Fare l'esempio di una funzione che abbia come asintoto verticale la retta x=3.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$f(x) = \log(x-3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$$

$$f(x) = \log\frac{x+3}{x-3}$$

1.3 Fare l'esempio di una funzione definita su tutto R discontinua nel punto x=1.
Fra gli esempi che avete fatto (corretti):

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 1 \\ 3 & x > 1 \end{cases}$$

ATTENZIONE! Molti hanno sbagliato portando come esempio una funzione che non era definita in x=1.

A

2. Risolvere graficamente l'equazione:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{x}$$

Si tratta di riconoscere se e quante volte i grafici delle due funzioni si incontrano.

Il grafico di $\frac{1}{x}$ lo conosciamo.

Vediamo di tracciare il grafico di $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$: naturalmente ci interessano di questo grafico solo le caratteristiche rilevanti rispetto al problema che abbiamo (trovare se i due grafici si intersecano).

L'argomento della radice deve essere maggiore o uguale a 0; il denominatore dev'essere diverso da 0.

Otteniamo come dominio:

$$X =]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$$

Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to-1^-} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty$$

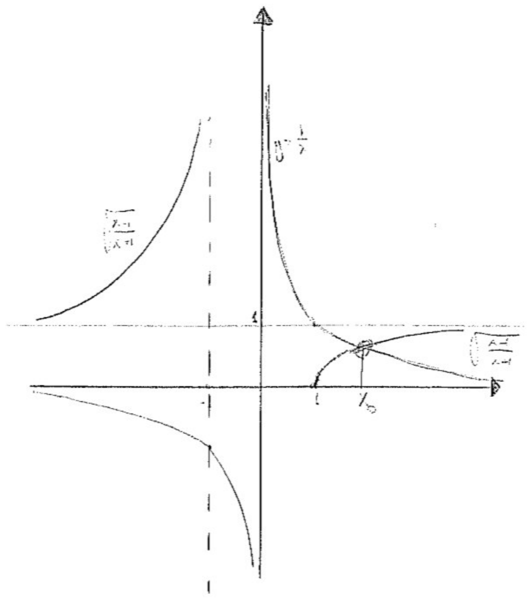
Studiamo la monotonia della funzione:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \frac{2}{(x+1)^2}$$

Quindi y' è positiva in $]-\infty,-1[$ e in $[1,+\infty[$, perciò in ognuno dei due intervalli la funzione è crescente.

A questo punto siamo in grado di tracciare i grafici delle due funzioni:

A



I grafici si intersecano in un punto di ascissa x_0: x_0 sarà l'unica soluzione dell'equazione data.

3. Riconoscere se per la funzione f valgono le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo indicato. In caso affermativo trovare un punto x_o che ha le proprietà descritte nell'enunciato.
$f(x) = x + e^x$ in [0,1]

L'enunciato del teorema di Lagrange è il seguente:
Sia f derivabile in]a, b[e continua in [a, b]. Allora esiste x_0 appartenente ad]a, b [tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le ipotesi del teorema sono che f sia derivabile in]a, b[e continua in [a, b].
La funzione data è derivabile e continua in ogni intervallo in quanto somma di funzioni continue.
Cerchiamo quindi x_0 appartenente a]0, 1 [:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 + e - 1 = e$$

Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = 1 + e^x$$

Quindi dobbiamo cercare *x* tale che:

$$1 + e^x = e$$

$$e^x = e - 1$$

Quindi:

$$x = \log(e - 1)$$

4.

$$\int xe^{2x} dx$$

Integro per parti, prendendo e^{2x} come fattore differenziale.

$$\int xe^{2x} dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

A

$$\int \frac{\log^3 x}{x} dx = \frac{\log^4 x}{4} + C$$

$$\int \frac{e^x + 4}{e^x - 4} dx$$

Risolvo per sostituzione, ponendo $e^x = t$:

$$\int \frac{t+4}{t-4} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t+4}{t(t-4)} dt$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale, dove il denominatore ha 2 radici reali distinte:

$$\frac{t+4}{t(t-4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-4}$$

$$t + 4 = A(t-4) + Bt$$

$$t + 4 = t(A+B) - 4A$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -4A = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{t+4}{t(t-4)} dt = -\int \frac{1}{t} dt + 2\int \frac{1}{t-4} dt = -\log|t| + 2\log|t-4| + C = -\log|e^x| + 2\log|e^x - 4| + C = -x + 2\log|e^x - 4| + C$$