

# L'apprendimento come attività costruttiva

## 1. L'APPRENDIMENTO COME ATTIVITÀ COSTRUTTIVA

L'insegnamento (non solo della matematica) ha risentito per lungo tempo dell'influenza di un modello di apprendimento secondo il quale la conoscenza poteva essere semplicemente trasferita da un soggetto (l'insegnante) ad un altro (l'allievo): l'unica domanda significativa in questo tipo di approccio era quale fosse il modo migliore per realizzare questo trasferimento. Il ruolo cruciale della comunicazione in questo processo di 'trasferimento' era peraltro sottovalutato: c'era una fiducia ingenua nel linguaggio e nella sua efficacia, in particolare nel campo dell'insegnamento della matematica, la disciplina che sembra vantare più di ogni altra un linguaggio specifico, *rigoroso e non ambiguo*. Negli ultimi decenni questo modello è stato superato da teorie dell'apprendimento diverse (influenzate fra gli altri dai lavori di Piaget e Vygotskij) e dalle ricerche nel campo dell'intelligenza artificiale. In particolare nel contesto dell'educazione matematica si fa usualmente riferimento alla teoria *costruttivista*, secondo la quale la conoscenza è in gran parte costruita dal discente, che non si limita ad aggiungere nuove informazioni al suo magazzino di conoscenze, ma invece crea collegamenti e costruisce nuove relazioni fra queste informazioni. Secondo questo modello davanti alla 'realtà' l'individuo fin dai primi anni di vita è soggetto attivo che costruisce interpretazioni dell'esperienza, nel tentativo di *dare senso* al mondo e di anticipare così le esperienze future. La conoscenza in quest'ottica non rappresenta una riproduzione del mondo reale, ma piuttosto fornisce struttura ed organizzazione all'esperienza.

Come conseguenza di questo continuo processo di interpretazione della realtà già all'età di cinque o sei anni i bambini hanno sviluppato delle vere e proprie *teorie* riguardo i tre ambiti che costituiscono il reale: quello degli oggetti fisici, quello degli organismi viventi, quello degli esseri umani (Gardner, 1991). Tali teorie (rispettivamente della *materia*, della *vita*, della *mente*) si accompagnano a competenze, interessi, valori e tutto questo influisce notevolmente sul modo in cui il bambino e poi lo studente apprende le nozioni nuove che incontra:

Queste teorie o visioni del mondo sono utili e potenti. Esse consentono ai bambini di dare un senso almeno provvisorio alla maggior parte delle cose che incontrano nel mondo. In parte questo loro potere è insidioso. Poiché né i bambini stessi né gli adulti sono stati consapevoli di queste teorie, una volta che incominci la scolarizzazione formale, esse tendono a venire ignorate. Tuttavia, anziché dissolversi come avrebbero desiderato Piaget e certi altri educatori, le teorie intuitive restano potenti mezzi di conoscenza e possono benissimo riemergere con tutta la loro forza una volta che la persona lasci l'ambiente scolastico [Gardner, 1991, tr. it. p.95].

In effetti ricerche nel campo della fisica, della probabilità, dei processi decisionali, hanno messo in evidenza che le intuizioni ingenuie che un individuo sviluppa riguardo ad alcuni aspetti della realtà possono coesistere con la conoscenza formale acquisita in merito, anche se tale conoscenza è in manifesta contraddizione con esse.

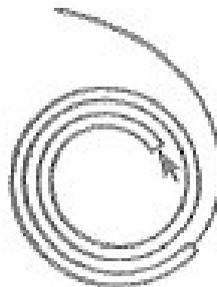
Nel campo della fisica Schoenfeld (1985a) riporta i risultati di uno studio di McCloskey (1983) condotto con un gruppo di studenti, alcuni dei quali avevano seguito corsi superiori di fisica. Agli studenti fu chiesto di prevedere il moto di una pallina di metallo spinta ad alta velocità in un tubo avente la forma rappresentata in figura 3.1:

FIGURA 3.1



Un gran numero di studenti (fra cui anche molti di quelli che avevano avuto un'istruzione specifica nel campo della fisica) dettero risposte scorrette; fra queste le più frequenti furono analoghe a quella riportata in figura 3.2:

FIGURA 3.2



Questi studi suggeriscono l'ipotesi che le intuizioni ingenuie possono sopravvivere alla conoscenza formale impartita dal sistema scolastico.

Altri studi classici e portati spesso a sostegno di questa ipotesi sono quelli condotti dai ricercatori Kahneman e Tversky sulle intuizioni probabilistiche nell'ambito dei processi decisionali. Ad esempio in un lavoro del 1982 essi riportano un esperimento in cui a due gruppi di soggetti (un gruppo composto da studenti senza esperienze nel campo della statistica, un altro composto da laureati in psicologia che invece avevano seguito corsi specifici) vengono date alcune informazioni sulla personalità di Linda:

*Linda ha 31 anni, non è sposata, è schietta e molto vivace. È laureata in filosofia. Quando era studentessa, si interessava molto ai temi della discriminazione e della giustizia sociale, e prendeva parte a manifestazioni antinucleari.*

Viene chiesto ai soggetti che partecipano all'esperimento quale di questi due affermazioni su Linda sia più probabile:

[A] Linda è un'impiegata di banca.

[B] Linda è un'impiegata di banca attiva nel movimento femminista.

Secondo te quale di queste affermazioni su Linda è più probabile?

Perché?

In un campione piuttosto numeroso di studenti che non avevano seguito corsi di statistica, l'86% dei soggetti giudica più probabile la seconda affermazione. Invece in un campione composto da laureati in psicologia solo il 50% commette tale errore.

Però la differenza fra studenti senza una preparazione a livello statistico e laureati sparisce quando le due affermazioni vengono presentate in una lista di otto affermazioni riguardanti Linda. In questo caso più dell'80% di entrambi i gruppi valuta l'opzione [B] più probabile dell'opzione [A].

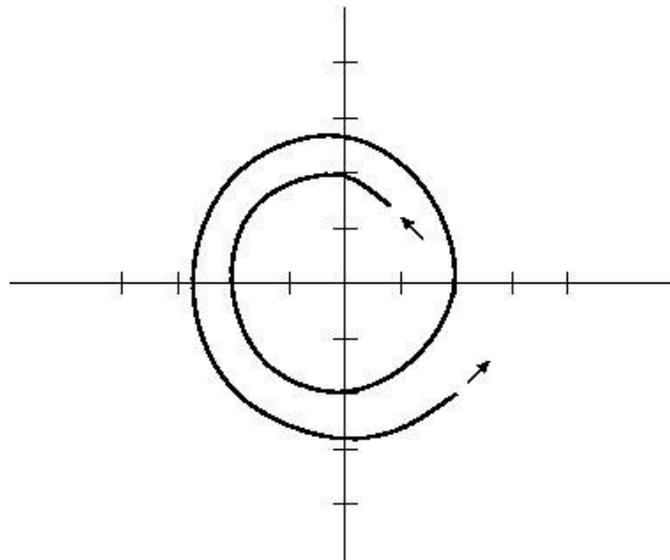
## 2. IL CONTESTO

Commentando gli esiti disastrosi del test riportato da McCloskey, Schoenfeld (1985a) suggerisce che probabilmente le risposte sarebbero state diverse se il problema fosse stato inserito nel contesto tipico dei problemi di fisica, come è descritto in figura 3.3.

FIGURA 3.3

*Problema:* La figura mostra un tubo metallico curvo visto dall'alto.

Una sfera metallica è inserita alla fine del tubo indicato dalla freccia ed è spinta dall'altra parte del tubo ad alta velocità. Il punto in cui fuoriesce la sfera ha coordinate (2,-2) (la misura è in metri). La sfera esce nella direzione del vettore  $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  con una velocità iniziale di 500 m/sec. Dare le coordinate della sfera un secondo dopo l'uscita dal tubo.



Le informazioni date dal contesto del problema – l'uso di un sistema di coordinate, di vettori, e del termine 'velocità iniziale' – richiamano gli schemi della conoscenza formale della fisica. Probabilmente allora molti studenti risolveranno il problema senza nemmeno pensare ad una possibile traiettoria curvilinea. In altre parole “la stessa persona può ricorrere alla fisica formale per una versione del problema eppure dare un'interpretazione qualitativa del fenomeno contraddittoria in un'altra versione” [Schoenfeld, 1985a, p. 150].

Del resto anche negli esempi di Kahneman e Tversky il contesto in cui il problema è proposto sembra guidare il soggetto a far ricorso ad un tipo di conoscenza oppure ad un altro.

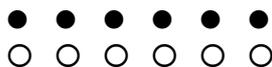
Il riconoscimento del ruolo del contesto ha segnato una svolta nella ricerca sui processi cognitivi a partire dagli anni '70, mettendo in evidenza che la nostra mente funziona in modi molto diversi da quelli che si erano ipotizzati. Nel suo testo *Come funziona la mente* (1998)

Paolo Legrenzi discute i risultati di una serie di studi che portano ad escludere che la mente funzioni esclusivamente sulla base di regole, applicando cioè una sorta di 'logica mentale': in realtà "la nostra mente si mostra sensibile ai contenuti su cui si trova a dover ragionare" (Legrenzi, 1998, p. 27).

Legrenzi definisce 'sogno' il ritenere che i nostri modi di pensare siano riconducibili alla capacità di padroneggiare l'applicazione di un numero ristretto di regole logiche: un sogno in cui hanno creduto fra gli altri Leibniz e Piaget. E proprio alcune posizioni di Piaget vengono messe in discussione da esperimenti che nella letteratura sono ormai dei classici: le modifiche da parte di Donaldson e McGarrigle alle prove di conservazione, ed il test delle carte di Wason e gli studi ad esso ispirati.

Gli studi di McGarrigle e Donaldson (1974) mettono in evidenza che è possibile far aumentare in modo significativo la percentuale di risposte corrette ai test classici di Piaget modificando solo alcuni elementi del contesto, senza alterare la struttura del compito.

**Ricordiamo la struttura di una tipica prova di Piaget:** l'uguaglianza iniziale dell'attributo principale è combinata con una somiglianza percettiva. Supponiamo ad esempio che l'attributo in esame sia la 'quantità numerica' (Piaget e Szeminska, 1941). Si propone al bambino una situazione in cui una fila con un certo numero di gettoni è messo sotto una fila contenente lo *stesso numero* (attributo principale) di gettoni. In questo caso la somiglianza percettiva è costituita dal fatto che ogni gettone della seconda fila è messo proprio sotto un gettone della prima fila:



Il bambino viene interrogato sull'uguaglianza iniziale. Se l'accetta (in caso contrario naturalmente l'esperimento termina) lo sperimentatore provoca una trasformazione che distrugge la somiglianza percettiva, senza intaccare l'attributo principale:



A questo punto il bambino viene di nuovo interrogato sull'attributo principale.

Se il bambino risponde correttamente si dice che 'conserva' l'attributo principale. Altrimenti, si dice che 'non conserva'.

Alcune obiezioni ormai classiche mosse a questo tipo di procedura riguardano il fatto che l'attenzione del bambino non è concentrata sul *significato* della domanda dello sperimentatore: il bambino dà un *sensò* a questa domanda, senso che è fortemente influenzato dalle informazioni del contesto (il cambiamento avvenuto, il fatto che l'interlocutore è un adulto, lo *stesso* adulto che ha causato il cambiamento...) <sup>19</sup>. Margaret Donaldson (1978) porta esempi molto belli di studi in cui la situazione sperimentale descritta viene alterata in certi aspetti contestuali. Questi studi evidenziano che se il cambiamento nella disposizione della seconda fila di gettoni viene provocato accidentalmente da un personaggio diverso dall'interlocutore adulto (ad esempio un orsetto che scombina la disposizione iniziale dei

---

<sup>19</sup> D'altra parte anche la comunicazione fra adulti è governata più dal *sensò* che dal *significato*, e quindi fortemente influenzata dal contesto. Basti pensare a come suona assurda (priva di senso, appunto) l'interazione: "Scusi, sa l'ora?" "Sì".

Eppure la risposta "Sì" (o "No") è del tutto adeguata al significato 'legale' della domanda, a differenza delle risposte che consideriamo 'sensate' (ad esempio: "Mezzogiorno").

gettoni) i risultati sono molto diversi: sono molto più numerosi i bambini che rispondono 'correttamente', cioè che dimostrano di conservare. In definitiva viene confermata in questo modo l'ipotesi che molti bambini rispondono scorrettamente perché risolvono un problema che è diverso da quello posto dallo sperimentatore.

Potremmo anche dire che il contesto nel quale è dato il problema nella versione originaria spinge l'interpretazione del bambino in una direzione che ostacola la risposta corretta. La modifica del contesto (ottenuta ad esempio con l'intervento dell'orsetto) spinge invece l'interpretazione del bambino in una direzione che è in accordo con la risposta corretta. In questo caso il contesto quindi 'aiuta' la risposta corretta perché favorisce il processo di comprensione del problema.

Il test delle carte di Wason (1966) invece mette in evidenza come il ragionamento sia fortemente ancorato ai contenuti, e quindi al contesto cui fa riferimento il problema<sup>20</sup>.

Nel test ci sono 4 carte: in ogni carta da una parte c'è un numero, dall'altra una lettera.

Le carte sono presentate così:



Il soggetto deve scegliere quali carte girare per verificare se per queste 4 carte vale la regola: *'Se da una parte c'è una vocale, dall'altra c'è un numero pari'*.

Tu quali carte gireresti?

- quella con la A
- quella con la R
- quella con il 4
- quella con il 7

Le risposte corrette a questo test, studiatissimo in tutto il mondo, sono dell'ordine del 10%.

Gli errori più frequenti sono di due tipi: girare la carta con il numero 4 per controllare se dall'altra parte c'è una vocale, e girare la carta con la lettera R per controllare se dall'altra parte c'è un numero dispari. Entrambi questi controlli sono inutili, in quanto la regola dice solo cosa deve accadere se da una parte c'è una vocale, ma non dice niente su cosa deve accadere se invece c'è una consonante. In altre parole l'unica combinazione in grado di contraddire la regola è 'vocale / numero dispari', e quindi va girata la prima carta (per controllare che dietro la A ci sia un numero pari), e la quarta (per controllare che dietro il 7 non ci sia una vocale).

I risultati molto bassi di questo test sembrano mettere in discussione le teorie di Piaget secondo le quali un individuo adulto, avendo ormai raggiunto lo stadio delle operazioni formali, dovrebbe essere in grado di padroneggiare situazioni di questo tipo.

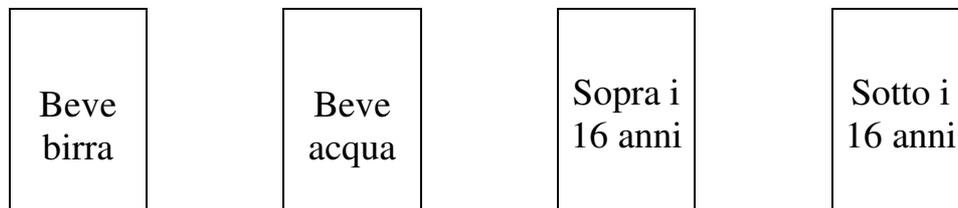
Una modifica del test di Wason è stata proposta da Griggs e Cox (1982), ed è citata da Legrenzi (1998), che a sua volta nel 1972 aveva condotto degli studi su una versione

<sup>20</sup> Nel caso dei problemi espressi in forma verbale il termine 'contesto' viene usato in una duplice accezione: come contesto in cui il problema è assegnato (ad esempio: nell'ambito di una lezione, di un'intervista, di una conversazione informale,...), e come contesto cui fa riferimento la situazione descritta nel problema. Nel caso del test di Wason si fa riferimento a questa seconda accezione.

alternativa. Nella versione di Legrenzi le 4 carte sono sostituite da altrettante buste da lettera. Le buste sul retro possono essere aperte o chiuse, e possono essere affrancate con un francobollo da 750 £ o da 500 £. Viene data la regola: *'Se una busta è chiusa, deve essere affrancata con un francobollo da 750 £'*. Le 4 buste sono presentate così: due dalla parte dove c'è l'affrancatura (la prima con francobollo da 750£, la seconda con francobollo da 500 £), due dalla parte opposta (una aperta, l'altra chiusa). La domanda diventa: "Quali buste gireresti, fra le 4 riportate sotto, per controllare se la regola è soddisfatta?" In questo caso cresce notevolmente la percentuale di chi risponde correttamente: il contesto quindi sembra favorire i processi risolutivi.

Nella versione di Griggs e Cox si chiede ai soggetti (alcuni studenti della Florida) di immeddesimarsi nel poliziotto protagonista della storia. Il poliziotto deve controllare una regola che è effettivamente vigente in Florida (e quindi è presumibilmente nota agli studenti): *'Se una persona beve birra deve avere più di 16 anni'*.

Su un tavolo vengono quindi messe 4 carte: da un lato c'è l'età della persona da controllare (sotto / sopra i 16 anni), dall'altro il tipo di bibita consumata al bar. Le 4 carte sono girate in questo modo:



Analogamente al test di Wason si chiede ai soggetti quali carte dovrebbe girare il poliziotto per controllare che sia rispettata la regola.

E tu quali carte gireresti per controllare se la regola è rispettata?

- quella con 'Beve birra'
- quella con 'Beve acqua'
- quella con 'Sopra i 16 anni'
- quella con 'Sotto i 16 anni'

Anche in questo caso (come nella versione delle buste di Legrenzi) il controllo della regola risulta facile, ed i soggetti indicano correttamente come carte da girare 'beve birra' e 'sotto i 16 anni'.

### 3. CONTESTI E SCOPI: LA PRAGMATICA

In realtà i risultati delle modifiche al test di Wason si possono interpretare facendo riferimento ad alcune caratteristiche del linguaggio utilizzato, in particolare al modo di usare l'implicazione 'se...allora' che compare nella regola da verificare.

Lo studio degli errori tipici nell'ambito del ragionamento condizionale ha costituito un filone di ricerca molto popolare, all'interno del quale il test delle carte di Wason ha avuto un ruolo significativo. Tale ambito è molto interessante per l'educazione matematica, in cui è ben nota ad esempio la facilità con cui gli studenti confondono ipotesi e tesi. Per spiegare questo comportamento per lungo tempo si è sostenuto che i soggetti interpretano il 'se...allora' come un 'se e solo se'.

**In realtà a partire dagli anni '80 questa interpretazione è stata messa in discussione a favore di un nuovo approccio, che attribuisce le anomalie nell'interpretazione delle frasi**

**condizionali all'applicazione di schemi tipici della conversazione, cioè corrispondenti agli usi dell'implicazione nel linguaggio quotidiano.** Ferrari (2005) cita la ricerca di Romain et al. (1983), che attraverso un dispositivo sperimentale confrontano tale teoria con quella classica, in cui come detto le anomalie nell'interpretazione delle frasi condizionali vengono attribuite invece all'identificazione del 'se...allora' con 'se e solo se'.

Un esempio di questo approccio alternativo è dato dal lavoro di Cheng e Holyoak (1985, 1989), che individuano tre schemi di ragionamento per l'implicazione: lo schema di permesso (*permissions*), quello di obbligo (*obligations*), e quello di causa-effetto (*causations*).

**Questi schemi consistono di un insieme di regole generalizzate, sensibili al contesto, che a differenza delle regole puramente sintattiche sono definite in termini di 'scopi'. Le regole relative agli schemi di permesso ed obbligo sono tipicamente imposte da un'autorità con scopi di tipo sociale; invece le regole relative allo schema di causa-effetto non sono imposte da un'autorità, e permettono di generare previsioni (ad esempio: "se scoppia la bomba, moriranno tutti")<sup>21</sup>.**

Lo schema di obbligo è molto simile a quello di permesso, tranne per il fatto che la dimensione temporale è rovesciata: in uno schema di permesso per intraprendere un'azione (ad esempio: bere alcolici) deve essere verificata una condizione, detta preconditione (avere più di 16 anni); invece nel caso dell'obbligo una certa situazione (ad esempio essere docenti di matematica e fisica) richiede che sia eseguita un'azione successiva (ad esempio fare 18 ore settimanali di lezione).

Lo schema relativo al 'permesso' è particolarmente interessante perchè ha una struttura che lo rende simile all'implicazione logica.

Tale schema può infatti essere descritto da 4 regole:

Regola 1: Per intraprendere l'azione, dev'essere soddisfatta la preconditione.

Regola 2: Se l'azione non va intrapresa, non c'è bisogno di soddisfare la preconditione.

Regola 3: Se la preconditione è soddisfatta, allora si può intraprendere l'azione.

Regola 4: Se la preconditione non è soddisfatta, l'azione non può essere intrapresa.

Un esempio di formulazione della regola 1 è proprio "Se uno beve alcolici, deve avere almeno 16 anni". Se questa affermazione richiama nel soggetto lo schema di permesso, verranno richiamate in modo naturale le altre tre regole che caratterizzano tale schema:

- Se uno non beve alcolici, non c'è bisogno che abbia più di 16 anni.

- Se uno ha più di 16 anni, può bere alcolici.

- Se uno ha meno di 16 anni, non può bere alcolici.

Queste tre regole, sostengono Cheng e Holyoak, sono proprio quelle che suggeriscono di girare le carte giuste nella versione modificata del test di Wason che abbiamo visto prima, in cui un poliziotto deve controllare il rispetto della legge vigente in Florida. Quindi la facilitazione in questo caso non sarebbe dovuta al fatto di fare riferimento ad un contesto, ma al fatto che *quel* contesto specifico richiama uno schema di permesso. In altre parole il contesto scelto (il poliziotto che deve controllare il rispetto della legge vigente in Florida) spinge verso una particolare interpretazione dell'implicazione tipica del linguaggio quotidiano che facilita la risposta corretta, ma modifica strutturalmente il compito di partenza (quello delle carte con il numero e la lettera) che era invece 'neutrale'.

L'approccio di Cheng e Holyoak è tipico **della *pragmatica*, disciplina che mette al centro dell'attenzione il contesto e gli scopi, e che studia il modo in cui la lingua è usata per comunicare.** Levinson (1983) nell'introduzione al suo testo *La Pragmatica* ne propone diverse possibili definizioni, che singolarmente mette in discussione e rifiuta perché a suo

---

<sup>21</sup> In realtà all'interno dello schema di causa-effetto si possono individuare differenti tipologie di schemi di ragionamento, che dipendono da vari fattori: ad esempio il fatto che l'effetto si ritenga prodotto da una singola causa o da molteplici.

parere insoddisfacenti dal punto di vista teorico, ma che nel complesso rendono a suo parere "uno schema soddisfacente della topografia generale della disciplina" (tr. it., p. 22). In particolare rendono bene l'idea della centralità del contesto e degli scopi nella pragmatica, alcune in modo suggestivo.

Ad esempio Levinson sottolinea l'importanza del contesto evidenziando l'anomalia di frasi come:

- I figli di Carlo sono hippies e lui ha figli.
- Con questo, io canto.
- Come tutti sanno, la terra per favore gira intorno al sole.

Per spiegare in che senso queste frasi sono anomale potremmo dire "che non ci sono contesti (almeno, non contesti comuni) in cui il loro uso sarebbe appropriato". Allora, dice Levinson, si potrebbe definire la pragmatica proprio come "*lo studio di quei principi che spiegano perché certe frasi sono anomale o non sono enunciati possibili*" (ibidem, p.22).

Una fra le nozioni più importanti della pragmatica e che qui più ci interessa è quella di **implicatura conversazionale**. Tale idea, dovuta a Grice (1975, 1978), è legata al **principio di cooperazione** da lui enunciato, che esprime le regole secondo le quali dovrebbe essere condotta una conversazione: brevità, adeguatezza dell'informazione agli scopi del discorso (né troppo poco informativo, né troppo), chiarezza, pertinenza, verità.

Naturalmente non è vero che la conversazione segue sempre queste regole, ma anche quando il discorso se ne scosta, spesso inconsapevolmente l'ascoltatore tende ad interpretare il messaggio *assumendo* il principio di cooperazione.

Un classico esempio è il seguente (Levinson, 1983):

A. Dov'è Carlo?

B. C'è una Volkswagen gialla davanti a casa di Anna.

Apparentemente la risposta di B non è pertinente, e violerebbe quindi le regole di cooperazione. Ma in realtà cerchiamo di interpretare l'enunciato di B come risposta cooperativa, e siamo portati quindi a fare una serie di inferenze: che B sappia che Carlo ha una Volkswagen gialla, e che ci voglia dire che probabilmente Carlo è a casa di Anna.

Queste inferenze fatte dall'ascoltatore per mantenere l'assunto di cooperazione vengono dette da Grice *implicature conversazionali*. A differenza dell'implicazione logica, che è un'inferenza che deriva dal contenuto semantico o logico, le implicature sono quindi inferenze fondate non solo sul contenuto di ciò che è stato detto, ma anche sull'assunto che quello che è stato detto segua le regole della cooperazione comunicativa.

Se ad esempio dico:

"Carlo ha quattordici figli."

anche se l'enunciato è compatibile con il fatto che Carlo abbia venti figli, l'interpretazione che ne abbia *esattamente* quattordici è l'unica compatibile con il principio di cooperazione; si tratta quindi di un'implicatura.

#### 4. CONTESTI, SCOPI E RAZIONALITÀ

L'approccio pragmatico allo studio del linguaggio mette in discussione le interpretazioni più standard di alcune delle prove che abbiamo riportato: tali interpretazioni sottolineano l'inadeguatezza dei comportamenti dei soggetti che rispondono scorrettamente pur possedendo le conoscenze necessarie, ed in definitiva li connotano come 'irrazionali'<sup>22</sup>.

Più in generale questa posizione è criticata da quei ricercatori, che, pur appartenendo ad ambiti disciplinari diversi, condividono il modello costruttivista dell'individuo come soggetto

---

<sup>22</sup> Ad esempio Piattelli Palmerini (1993) nel fornire una spiegazione di tali comportamenti mette il termine *spiegazione* tra virgolette " in quanto non ha niente di razionale" (p.102).

attivo che tenta di dare un senso alla realtà, e sottolineano quindi i legami fra i tipi di razionalità attivata ed il contesto e gli scopi in cui si muove un soggetto.

La posizione che accomuna questi ricercatori<sup>23</sup> è che le decisioni prese da un soggetto, e quindi anche la razionalità dei suoi comportamenti, vanno lette alla luce del *contesto* in cui un soggetto si pone, e degli scopi che caratterizzano tale contesto. Ne segue che i comportamenti dei soggetti che sbagliano possono apparire consistenti se consideriamo contesti e scopi alternativi rispetto a quelli in base ai quali li valutiamo irrazionali.

Com'è ragionevole aspettarsi gli studi che vengono rivisitati alla luce di questo approccio sono soprattutto quelli di Kahneman e Tversky.

Nell'ambito dell'educazione matematica **Cobb (1986) discute l'esperimento di Linda distinguendo due tipi di contesto e di scopi: il contesto del 'gioco statistico', e quello della 'modellizzazione'**. Se un soggetto si pone nel contesto del 'gioco statistico' deve vedere l'individuo (in questo caso Linda) come membro di una classe, e quindi prescindere da tutte le caratteristiche dell'individuo che non riguardano questa proprietà. Ma se uno non si mette nel contesto statistico, può porsi invece un altro scopo, cioè quello di fornire una rappresentazione dettagliata di Linda: è lo scopo caratteristico del 'contesto di modellizzazione', sia che il processo di modellizzazione abbia come prodotto una teoria scientifica o una rappresentazione di un'altra persona. In fondo è una posizione vicina a quella di Gardner (1991): lo psicologo infatti nel caso di Linda interpreta le risposte scorrette come dovute a stereotipi e immagini dominanti, che fanno sì che le conoscenze formali acquisite vengano, almeno momentaneamente, abbandonate.

Cobb conclude:

Questa analisi indica che dire semplicemente che il comportamento dei soggetti non è completamente razionale non prende in considerazione un punto importante. All'interno dei vincoli del 'modeling context' il loro comportamento era perfettamente razionale – essi sanno dall'esperienza che funziona. È il processo in base al quale costruiamo rappresentazioni degli altri'. [...] **comportamenti che possono essere inizialmente liquidati come irrazionali cominciano ad avere senso quando si prendono in considerazione i contesti all'interno dei quali i soggetti hanno operato e gli obiettivi che essi hanno tentato di raggiungere** [Cobb, 1986, p. 3].

Questo modo di usare il termine *contesto* rimanda al concetto di *mondo possibile* di Goodman (1978), ampiamente discusso da Bruner (1986) e da Smorti (1994): per l'uomo non esiste un unico mondo, ma esistono diversi mondi, o diverse versioni di mondo, in relazione ai suoi scopi ed ai mondi creati dagli altri.

Goodman [...] è un filosofo della mente convinto che scienza e arte scaturiscano da certe comuni attività costruttive, vincolate, caso per caso, a condizioni diverse di definizione della correttezza e guidate da convenzioni altrettanto diverse derivanti dal loro «radicamento». Secondo lui, la differenza non consiste nel fatto che le arti sono «soggettive», mentre la scienza è «oggettiva», ma, invece, proprio nel fatto che sono diversi i modi in cui esse costruiscono il proprio mondo [Bruner, 1986, tr. it. p. 125].

Ad essere in questione allora non è la distinzione tra oggettività e soggettività, ma piuttosto le differenze tra le attività costruttive delle varie arti e quelle delle scienze, ed in particolare le differenze nell'uso di quelli che Goodman chiama «sistemi simbolici».

---

<sup>23</sup> Oltre agli autori già citati nell'ambito della linguistica si veda ad esempio Nelson Goodman (1978) per la filosofia; Jerome Bruner (1986) e Howard Gardner (1983) per la psicologia; Clifford Geertz (1983) per l'antropologia; Paul Cobb (1986) per l'educazione matematica.

Il *mondo possibile*, così come il contesto cui fa riferimento Cobb, non va quindi inteso tanto come "situazione esterna all'individuo, quanto come quadro di riferimento mentale per comprendere gli eventi" (Smorti, 1994, p.86). Smorti riporta come esempio le ricerche condotte da Zukier e Pepitone (1984) e da Zukier (1986) sulla falsariga delle prove classiche di Kahneman e Tversky. Come nel caso di Linda, si comincia leggendo la descrizione di una persona (ad esempio: *'Mario non mostra molto interesse per i problemi sociali e politici, passa molto tempo libero a fare lavori di falegnameria o a risolvere rompicapo matematici'*). Questo breve ritratto viene presentato al soggetto dell'esperimento fingendo di averlo preso a caso da un mucchio di 100 altri ritratti, 70 dei quali sono di avvocati e 30 di ingegneri. Per ogni descrizione proposta si chiede quindi al soggetto la probabilità che la descrizione si riferisca ad un avvocato o ad un ingegnere. Le prove mettono in evidenza la tendenza dei soggetti a rispondere contraddicendo o ignorando le informazioni di tipo probabilistico date. La posizione di Zukier (1986) a riguardo è che i comportamenti criticati sono da considerare **“non come delle deviazioni involontarie dalla strada maestra della razionalità, ma come delle procedure intenzionali, dirette ad uno scopo e plausibili in rapporto al contesto e al mondo possibile nel quale l'individuo si trova a pensare e a decidere”** (Smorti, 1994, p. 121).

Uno degli esempi con cui Smorti illustra questa ipotesi è un esperimento tratto da Piattelli Palmerini (1993). Si chiede a 80 studenti di un college di Londra di immaginarsi questa situazione: sei persone si sfidano alla roulette russa usando una pistola con un tamburo a sei colpi. La pistola ha un solo proiettile: ciascuno a turno preme il grilletto e, se è fortunato, passa la pistola al compagno accanto. Circa il 50% degli studenti dichiara che la prima posizione è quella *oggettivamente* più sicura, mentre solo il 23% afferma che tutte e sei le posizioni hanno la stessa probabilità di essere mortali. Fino a questo punto l'esperimento si limita a evidenziare una nozione di probabilità 'bizzarra'. Ma la cosa più interessante (discussa da Smorti) è la seconda parte di quest'esperimento. Si chiede agli stessi soggetti in quale posizione preferirebbero trovarsi: in questo caso il 40% indica la prima, ed il 40% l'ultima! Quelli che hanno optato per l'ultima posizione argomentano la propria scelta dicendo che in questo modo avrebbero potuto vivere di più ed avere la possibilità di fare qualche gesto disperato, o che avrebbero preferito schiacciare il grilletto sicuri di morire piuttosto che rimanere nell'incertezza. Smorti commenta così la contraddizione apparente fra le risposte alle due domande:

Le due domande («qual è più sicura» e «in quale posizione vorresti essere») prefiguravano così due diversi mondi possibili in base ai quali i soggetti formulavano un loro giudizio [Smorti, 1994, p. 113].

Queste osservazioni sottolineano il legame profondo fra razionalità, contesti, scopi, suggerendo quindi un'estrema cautela nel giudicare irrazionale il comportamento di un altro soggetto.

Contesti diversi sono caratterizzati da scopi e da razionalità diversi: a volte, come nel caso di Linda, il fatto di immaginare contesti diversi porta a rivedere il giudizio di irrazionalità su una risposta dato inizialmente. La stessa cosa può accadere se si prospettano scopi alternativi rispetto a quelli ipotizzati inizialmente. E' il caso della situazione descritta nel seguente aneddoto (Ankeny, 1982, in Nicholls<sup>24</sup>, 1984), che ha come protagonista il matematico John Von Neumann, fondatore della teoria dei giochi:

Von Neumann, a cui si devono importanti teoremi sull'esistenza di strategie ottimali in certi tipi di giochi, venne insistentemente sfidato a poker da un gruppo di giovani matematici.

---

<sup>24</sup> Non a caso si tratta di una raccolta di articoli sulla motivazione.

Accettò finalmente di giocare, ma fra lo sconcerto dei presenti nel giro di mezz'ora aveva perso tutto il suo denaro, puntando come se non guardasse nemmeno le carte.

Finita così rapidamente la partita, si allontanò scusandosi. Gli altri giocatori rimasero a discutere il suo comportamento, senza riuscire a comprendere quali strategie avesse adottato.

Finalmente uno di essi trovò la soluzione: «Ecco! Lui non ha cercato di massimizzare il suo denaro, ma di minimizzare il suo tempo!» [Akeny, 1982, *cit.* in Nicholls, 1984, p. 39].

Il comportamento di Von Neumann appare irrazionale rispetto all'obiettivo 'massimizzare il denaro', ma non lo è rispetto all'obiettivo 'minimizzare il tempo di gioco': una valutazione sulla razionalità rimanda, anche se implicitamente, ad un obiettivo cui fare riferimento. Per dirla con Cobb, rimanda ad un *contesto*; con Goodman, ad un *mondo possibile*.

## **5. ANCORA SULLA RAZIONALITÀ: PENSIERO LOGICO-SCIENTIFICO E PENSIERO NARRATIVO**

L'idea di razionalità diverse associate a contesti e obiettivi diversi è particolarmente interessante dal punto di vista didattico. Da un lato apre uno scenario di interpretazioni possibili per i comportamenti dell'allievo, dall'altro pone il problema della scelta del contesto più adeguato per attivare un certo tipo di razionalità.

Fra le varie interpretazioni dei risultati messi in luce dagli studi di Kahneman e Tversky mi sembra significativa nel contesto delle difficoltà in matematica quella proposta da Zukier (1986) e ampiamente ripresa e discussa nei lavori che abbiamo citato di Bruner (1986) e di Smorti (1994): **gli apparenti fallimenti nel ragionamento di tipo logico sono considerati come un'espressione di una forma particolare di razionalità, quella tipica del pensiero**

**narrativo.** Nel commentare i comportamenti dei soggetti nelle ricerche condotte sulla falsariga delle prove classiche di Kahneman e Tversky, Zukier conclude che in mancanza di informazioni sufficienti a chiarire l'identità del personaggio, i soggetti si affidano ad un procedimento che procede dall'alto verso il basso: "dato quello che so sulla frequenza della categoria generale, qual è la probabilità che un dato caso appartenga a questa categoria?" Ma quando ci sono sufficienti informazioni per costruire una *storia* del personaggio (ed è esattamente quello che accadeva nel caso di Linda, o nel caso di Mario) le persone si affidano ad un pensiero che procede dal basso verso l'alto: un pensiero che produce racconti plausibili e ragionevoli, anche se non necessariamente veri. In definitiva quanto più la descrizione di una persona è informativa sulle sue caratteristiche e si avvicina ad uno stereotipo, tanto meno verranno seguiti i principi logici della probabilità. Del resto gli stessi Kahneman e Tversky (Tversky e Kahneman, 1983) avevano sottolineato che le euristiche basate sulla rappresentatività, tipicamente usate nel test di Linda, favoriscono la creazione di buone storie. E Piattelli Palmerini, insistendo sull'irrazionalità delle risposte che ignorano le leggi probabilistiche, commenta: "Qui si esce dalla statistica, e (si direbbe) perfino dalla scienza, per entrare in pieno nel romanzo" (1993, p. 142).

Si delineano quindi due tipi di pensiero, che Bruner (1986, 1990) definisce fra loro irriducibili e complementari: il pensiero *logico-scientifico* e quello *narrativo*. Il primo si occupa di categorizzare la realtà, di ricercare cause di ordine generale, applicando argomentazioni dimostrative, ma appare inadeguato a mettere in relazione azioni e intenzioni, desideri, convinzioni e sentimenti, a coglierne il significato. L'interpretazione dei fatti umani è invece resa praticabile da un tipo differente di pensiero, che caratterizza una differente modalità di approccio al mondo: il *pensiero narrativo*. Esso produce racconti plausibili e ragionevoli, la cui funzione è "quella di trovare uno stato intenzionale che mitighi o almeno renda comprensibile una deviazione rispetto al modello di cultura canonico" (Bruner, 1990, tr. it. p. 59).

La nozione di *causalità*, che Bruner riconosce come primitiva<sup>25</sup> è diversa nei due tipi di pensiero:

La struttura di un'argomentazione logica ben costruita è radicalmente diversa da quella di un racconto efficacemente impostato. L'una cosa e l'altra, forse, rappresentano una versione più specializzata ed evoluta dell'esposizione pura e semplice, quella versione, cioè, per la quale i giudizi di fatto si convertono in giudizi implicanti la causalità. Ma i tipi di causalità impliciti in tali giudizi sono molto diversi nei due casi. Il termine «allora» riveste funzioni molto diverse nell'enunciato logico "se X, allora Y" e nel testo narrativo "il re morì e allora morì anche la regina". Nel primo caso esso allude a

---

<sup>25</sup> Bruner (1986) fa riferimento anche ad una sorta di primitività dell'idea di *intenzionalità*: "ci troveremo a dover concludere che l'«intenzione e le sue vicissitudini» costituiscono un sistema categoriale primitivo mediante il quale organizziamo l'esperienza, un sistema primitivo almeno quanto quello della categoria di causalità. Dico 'almeno', perché di fatto l'ormai comprovato animismo infantile fa pensare che la categoria più primitiva dei bambini sia quella di intenzione. Come ha dimostrato Piaget, con quegli esperimenti che per la prima volta gli permisero di imporsi all'attenzione di tutto il mondo, gli eventi che hanno una causa fisica il bambino li intende in un'ottica psicologica" (*ibidem*, tr.it. pp. 24-25).

una ricerca delle condizioni universali di verità, nel secondo a probabili rapporti particolari fra due eventi: un dolore mortale, il suicidio o un delitto [Bruner, 1986, tr. it. p.16].

La distinzione fra pensiero logico e pensiero narrativo suggerisce due ipotesi interessanti, diverse e non incompatibili, per spiegare quelle che possono apparire carenze del pensiero logico-scientifico.

La prima in realtà è una precisazione dell'ipotesi emersa nei paragrafi precedenti, che sottolineava l'importanza del contesto nel dirigere verso un tipo di razionalità oppure un altro: cioè che il contesto abbia un ruolo importante nel guidare il ricorso ad un tipo di pensiero logico oppure narrativo.

La seconda è che per alcuni soggetti l'approccio *naturale* alla realtà sia di tipo narrativo, mentre per altri di tipo logico.

La prima di questa ipotesi è confermata dallo studio già citato di Zukier e Pepitone (1984): i ricercatori mostrano come dando istruzioni di tipo diverso, in altre parole proponendo il test in contesti diversi, si riescono ad indirizzare i soggetti verso un pensiero di tipo logico o invece di tipo narrativo.

Il ruolo del contesto nel dirigere verso un tipo di pensiero o l'altro è confermato anche da una ricerca di Macchi (1992) riportata da Smorti (1994), in cui si mostra come un'opportuna manipolazione linguistica dei quesiti di Kahneman e Tversky (fatta in modo da valorizzare il problema generale della probabilità piuttosto che la percezione che il singolo individuo ha di essa) modifica sensibilmente il tipo di pensiero cui il soggetto fa ricorso nel rispondere.

Smorti conclude che "l'uso di un pensiero logico o narrativo dipende da un meccanismo molto delicato, altamente sensibile al fatto che il testo o il contesto suggerisca aspetti più estensionali o più intensionali del significato" (*ibidem*, p. 120).

**Negli esempi fatti finora la distinzione fra pensiero narrativo e pensiero logico è chiamata in causa per spiegare la differenza fra risposte date ad una stessa domanda. Ma pensiero narrativo e pensiero logico non sono necessariamente in contrapposizione. In particolare il pensiero narrativo può essere attivato a partire da un problema, nel tentativo di attribuire un senso ad una situazione che apparentemente non ne ha: in questo caso il soggetto quasi invariabilmente descriverà un mondo ipotetico in cui l'eccezione incontrata ha senso. Ad esempio, dice Bruner:**

Se qualcuno entra nell'ufficio postale, apre la bandiera a stelle e strisce e comincia a sventolarla, il nostro interlocutore [...] ci spiegherà, in risposta alla nostra perplessità, che oggi probabilmente ricorre qualche festa nazionale che egli stesso aveva dimenticato, che la locale Associazione Combattenti e reduci ha evidentemente dei sostenitori accesi o, più semplicemente, che l'individuo con la bandiera è un esaltato nazionalista la cui immaginazione è stata colpita da qualcosa che ha letto sul giornale di questa mattina [Bruner, 1990, tr. it. p. 59].

E' interessante notare che in questo modo di procedere il soggetto fa ricorso alla propria *conoscenza enciclopedica*, cioè l'insieme generale delle conoscenze che ha sul mondo<sup>26</sup>.

Attraverso la conoscenza enciclopedica quindi il pensiero narrativo può cooperare nel trovare elementi di razionalità là dove il pensiero puramente logico fallirebbe. Mi sembra questo il caso della risposta ad un 'problema assurdo' data da un bambino di una terza elementare. Nella sua classe faceva tirocinio un'insegnante che aveva seguito un corso sui problemi da me tenuto. Avevo parlato fra l'altro del problema noto come 'L'età del capitano', che in Francia ha

---

<sup>26</sup> Spesso contrapposta all'insieme circoscritto delle conoscenze linguistiche che fanno riferimento al significato: il cosiddetto *dizionario*.

dato vita ad un filone di ricerca molto ricco sul ruolo che hanno le dinamiche allievi-insegnante nel contesto scolastico (Baruk, 1985):

"Su una nave ci sono 26 montoni e 10 capre; quanti anni ha il capitano?"

Avevo raccontato come la maggior parte dei bambini 'risolve' in qualche modo questo problema, scegliendo in genere fra le operazioni note quelle la cui applicazione porta a risultati verosimili.

L'insegnante, scettica ma incuriosita, aveva voluto dare un problema analogo:

**Problema:** In un prato ci sono 20 pecore, 7 capre, e 2 cani. Quanti anni ha il pastore?

Dei 14 allievi, 12 combinano i dati arrivando ad una risposta (la più comune è "29 anni", ottenuta sommando tutti i numeri), uno risponde che non ci sono dati sufficienti, e un altro risponde così:

*"Ho fatto un ragionamento particolare: il pastore se ha due cani per così poche bestie uno dei due cani forse gli serve perché è non vedente. Quindi deduco che abbia sui 70-76 anni".*

Queste considerazioni pongono il problema didattico di come utilizzare il pensiero narrativo *in sintonia* e non *contro* il pensiero di tipo logico: in fondo è esattamente il problema che ha affrontato e risolto la Donaldson, modificando opportunamente il contesto nel caso della prova di Piaget sulla conservazione della quantità.

La distinzione fra pensiero logico e pensiero narrativo suggerisce in modo naturale anche la seconda ipotesi che abbiamo formulato all'inizio: che, pur senza discutere l'importanza del contesto nel dirigere verso un tipo di pensiero o un altro, alcune persone tendano ad affrontare la realtà in modo logico ed altre in modo narrativo. In altre parole che sia possibile distinguere fra soggetti *logici* e soggetti *narrativi*.

In effetti alcune ricerche di Smorti (1994) condotte con bambini fra i 5 e gli 11 anni evidenziano che nel procedere a classificazioni spontanee di materiale ludico alcuni bambini fanno uso più di criteri logici ed altri più di criteri narrativi. Queste tendenze sembrano essere stabili nel tempo, tanto da far pensare ad una sorta di *stile* personale.

La distinzione fra narrativi e logici mi sembra una categorizzazione utile per comprendere alcune differenze nei comportamenti degli allievi. A questo proposito ricordo un episodio raccontato da Bruno D'Amore ad un convegno per insegnanti. E' il resoconto di una visita ad una scuola dell'infanzia (D'Amore, 1996): i bambini avevano dedicato la mattina a colorare dei fogli di carta appesi alle pareti facendo uso di lunghi pennelli da intingere in piattini pieni di colori; i risultati di questa esperienza creativa erano tanti fogli colorati appesi al muro. D'Amore si avvicina ad una bambina che contempla orgogliosa il proprio lavoro, una macchia del tutto indecifrabile, e le chiede: "*Cosa hai disegnato*" La bambina spiega: "*Un liono che mangia la gente nella foresta*". Incoraggiata dai cenni di consenso di D'Amore, la bambina si lancia con foga a decifrare ogni macchia, continuando ad aggiungere dettagli alla storia: "*Qui c'è un signore che è scappato per la paura. Allora il liono si è arrabbiato. ...*"

Dopo aver ascoltato diligentemente la spiegazione, D'Amore si rivolge ad un bambino che è stato attento ad ascoltare il fiume di parole della compagna. Si rivolge a lui ed al suo disegno, e gli chiede con la stessa affabilità che ha avuto tanto successo con la bambina: "*E tu? Cosa hai disegnato?*"

Ed il bambino, semplicemente:

*"Una riga."*

La contrapposizione fra approccio logico e narrativo ai problemi di matematica è resa in modo poetico da Philip Roth, nel suo libro autobiografico *La mia vita di uomo*<sup>27</sup>:

Quand'ero io il paziente, malaticcio e febbricitante, lui tante volte mi disorientava, invece: mi pareva che fosse una specie di giocattolo elettrico parlante che veniva a giocare con me, puntualmente, ogni sera alle sei. Per divertirmi non sapeva escogitare di meglio che propormi certi problemi d'aritmetica, per i quali lui stesso era un mago. "Lo sconto", esordiva, alla maniera d'uno studente che annuncia il titolo della poesia mandata a memoria. "Un negoziante, per cercar di dar via un cappotto passato di moda, ne abbassa il prezzo da trenta a ventiquattro dollari. Non riuscendo ancora a venderlo, lo ribassa ulteriormente a diciannove dollari e venti cents. Non trova nessun acquirente. Allora riduce ancora il prezzo e stavolta lo vende". Qui faceva una pausa. Se volevo, potevo chiedergli che ripettesse questo o quel dettaglio. Sennò, procedeva. "Ebbene, Nathan, per quanto l'ha venduto, posto che l'ultimo sconto era in proporzione con i due precedenti?" Oppure: "Per fare una catena". Un boscaiolo ha sei pezzi di catena ognuno di quattro anelli. Se il costo per aprire un anello è..." e così via. Il giorno dopo, mentre la mamma canticchiava un motivo di Gerschwin facendo il bucato, io, a letto, sognavo a occhi aperti il negoziante e il boscaiolo. A chi avrà finito per vendere quel cappotto, il bottegaio? Si sarà reso conto, l'acquirente, ch'era passato di moda? Se l'indossava per andare al ristorante, avranno riso di lui? E come si capiva che la moda era diversa, da un anno all'altro? "Non trova nessun acquirente" ripetevo fra me, e quelle parole mi mettevano malinconia. Ricordo ancora come era carico, per me, il termine "acquirente". Sarà stato il boscaiolo coi sei pezzi di catena quello che, nella sua rustica innocenza, aveva finito per comprare il cappotto tagliato secondo la moda dell'anno scorso? e perché, tutt'a un tratto, avrà avuto bisogno d'un cappotto? Sarà stato invitato a un ballo in costume? E da chi? Mia madre trovava "acute" le domande che io sollevavo a proposito di quei problemi, ed era lieta che mi dessero qualcosa cui pensare mentre lei era occupata con le faccende e non poteva giocare con me all'oca o a dama. Mio padre invece si sentiva cascare le braccia, a vedermi intrigato così da fantastici e irrilevanti dettagli storici o geografici o psicologici anziché dalla semplice e nuda bellezza della soluzione aritmetica. Non riteneva che dessi prova d'intelligenza; e aveva ragione [Roth, 1974, tr. it. pp. 46-47].

L'esistenza di due modalità naturali di approccio ad un problema, di due stili personali, ricorda la teoria di Gardner sulle intelligenze multiple (1983): in particolare le tipologie logico-scientifico e narrativa rimandano rispettivamente a quelle che lo psicologo chiama intelligenza logico-matematica ed intelligenza sociale. Howard Gardner è senza dubbio lo studioso che più ha contribuito non solo a teorizzare la posizione ormai consolidata che preferisce parlare di *qualità* dell'intelligenza piuttosto che di *quantità*, ma anche a studiarne le implicazioni per il sistema scolastico.

Questo tipo di studi sottolinea la diversità degli individui ed in particolare degli allievi, così come fanno i contributi sugli stili cognitivi<sup>28</sup>, con cui condivide il punto di vista che non esista in assoluto una modalità migliore di altre: piuttosto modalità diverse sono adeguate a tipologie di compiti diverse, a problemi diversi. Da un punto di vista didattico questo suggerisce l'importanza che ogni allievo (ma anche ogni insegnante) sia consapevole del proprio stile, e l'opportunità di sviluppare in ogni individuo gli stili più deboli; ma sottolinea anche la necessità di rispettare modalità di pensiero e di approccio ai problemi diverse da quelle che ci sono più congeniali. Del resto già nel 1909 Poincaré scriveva a proposito dei possibili modi di affrontare la matematica:

---

<sup>27</sup> Ho scoperto questo brano nel libro di Sheila Tobias *Come vincere la paura della matematica* (1978). Pur non facendo riferimento alla distinzione fra pensiero logico e pensiero narrativo, l'autrice osserva che definire Roth 'mente non matematica' significa non cogliere quello che rappresenta, cioè uno dei modi possibili (un 'faro') in cui si esprime la curiosità umana "alla ricerca di un significato" (tr. it. p. 129).

<sup>28</sup> Si veda ad esempio Cornoldi (1991), De la Garanderie (1991), Cornoldi, De Beni e Gruppo MT (2001), Sternberg (1998). Nel contesto della matematica si trovano interessanti riferimenti in Krutetskii (1976).

Quante tendenze diverse! Bisogna combatterle? O servirsene? E se volessimo combatterle, quale dovremmo favorire? A quelli che si accontentano della logica pura, bisognerà mostrare che non hanno visto che un aspetto delle cose? [...] In altri termini, dobbiamo obbligare i giovani a modificare la natura della loro mente? Un tentativo del genere sarebbe vano; non possediamo, infatti, la pietra filosofale che ci permetterebbe di trasmutare gli uni negli altri i metalli che ci sono stati affidati; tutto ciò che possiamo fare è di lavorarli adattandoci alle loro proprietà.

[...] gli stessi matematici non sono tutti fusi nello stesso stampo. Basta leggere le loro opere per distinguere tra di loro due tipi di menti, i logici, come Weierstrass ad esempio, e gli intuitivi, come Riemann.

Stessa differenza tra i nostri studenti. Alcuni preferiscono trattare i loro problemi 'con l'analisi', come dicono loro, gli altri 'con la geometria'.

Inutile cercare di cambiare qualcosa in questa situazione, e d'altra parte non sarebbe nemmeno desiderabile. Bene che ci siano dei logici e degli intuitivi; chi oserebbe dire se preferirebbe che Weierstrass non avesse mai scritto, o che Riemann non fosse mai esistito? Dobbiamo dunque rassegnarci alla differenza delle menti, o meglio, dobbiamo rallegrarcene [Poincaré, 1909, tr. it. pp. 84-85].