Esercizio 1. Trovare tutti i punti critici della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e stabilirne la natura (massimo locale, minimo locale o sella):

$$f(x,y) = x^4 - \frac{1}{8}y^4 + 2x^2y + \frac{1}{24}y^6.$$

Soluzione: $\nabla f(x,y) = \left(4x^3+4xy, -\frac{1}{2}y^3+2x^2+\frac{1}{4}y^5\right)$. Per trovare i punti critici risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 4x^3+4xy=0 \longrightarrow 4x(x^2+y)=0 \to x=0 \vee y=-x^2 \\ -\frac{1}{2}y^3+2x^2+\frac{1}{4}y^5=0 \end{cases}$$

Caso 1 $(x=0)$: $\frac{1}{4}y^5-\frac{1}{2}y^3=0 \to y=0 \vee y=\pm\sqrt{2}$

Quindi troviamo i punti $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$

Caso 2: $(y=-x^2)$: $2x^2+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{4}x^{10}=0 \to x^2(x^8-2x^4-8)=0$

$\to x=0 \vee x^4 = 1\pm\sqrt{1+8} \to x=0 \vee x^4=4 \vee \underbrace{x^4=-2}_{\text{impossibile}} \to x=0 \vee x=\pm\sqrt{2}$

Quindi troviamo i punti $(0,0)$, $(\sqrt{2},-2)$, $(-\sqrt{2},-2)$.

Riassumendo, i punti critici sono: $(0,0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-2)$, $(-\sqrt{2},-2)$.

Calcoliamo la matrice Hessiana: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+4y & 4x \\ 4x & \frac{5}{4}y^4-\frac{3}{2}y^2 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tuttavia si vede che $(0,0)$ è una sella, poiché $f(0,0)=0$, $f(t,0)=t^4>0 \ \forall t\neq 0$, $f(0,t) = -\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{24}t^6<0 \ \forall t\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})\setminus\{0\}$.

$Hf(0,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to$ Definita positiva $\to$ minimo locale

$Hf(0,-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to$ Indefinita $\to$ sella

$Hf(\sqrt{2},-2) = \begin{pmatrix} 16 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 14 \end{pmatrix}$ $\det = 224-32 = 192>0$, $\operatorname{tr} = 30>0$ $\to$ def. pos. $\to$ min. loc.

$Hf(-\sqrt{2},-2) = \begin{pmatrix} 16 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 14 \end{pmatrix}$ $\det = 192>0$, $\operatorname{tr} = 30>0$ $\to$ def. pos. $\to$ min. loc.

Esercizio 2. Calcolare
$$\int_\Sigma (x^2 - y^2)\, dS,$$
dove Σ è la superficie parametrizzata da
$$[0,1] \times [0,1] \ni (u,v) \mapsto r(u,v) = (u+v, u-v, u^2 - v^2).$$

Soluzione: Per definizione $\displaystyle\int_\Sigma (x^2-y^2)\,dS = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left((u+v)^2-(u-v)^2\right) \cdot \left\|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right\| du\,dv$

Calcoliamo quindi $\left\|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right\|$.

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (1, 1, 2u) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (1, -1, -2v)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & -2v \end{pmatrix} = (-2v+2u, 2u+2v, -2)$$

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right\| = \sqrt{4v^2 - 8uv + 4u^2 + 4u^2 + 8uv + 4v^2 + 4} = 2\sqrt{1+2u^2+2v^2}.$$

Quindi
$$\int_\Sigma (x^2-y^2)\,dS = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left(u^2+2uv+v^2-u^2+2uv-v^2\right) \cdot 2\sqrt{1+2u^2+2v^2}\,du\,dv =$$
$$= \int_0^1 du \int_0^1 dv\ 8uv\sqrt{1+2u^2+2v^2} = \int_0^1 du \left[\frac{4}{3}u\left(1+2u^2+2v^2\right)^{3/2}\right]_{v=0}^{v=1}$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}u\left(3+2u^2\right)^{3/2} - \frac{4}{3}u\left(1+2u^2\right)^{3/2}\right) du$$
$$= \left[\frac{2}{15}\left(3+2u^2\right)^{5/2} - \frac{2}{15}\left(1+2u^2\right)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{15}\cdot 5^{5/2} - \frac{4}{15} 3^{5/2} + \frac{2}{15}.$$

Esercizio 3. Si considerino il campo

$$\vec{F}(x,y) := \left(-\frac{2y^3}{4x^2+y^6}, \frac{6xy^2}{4x^2+y^6}\right),$$

e la curva

$$\gamma(t) := \left(\frac{1}{2}\cos t, (\sin t)^{\frac{1}{3}}\right) \qquad \forall t \in [0, 2\pi].$$

a) Determinare il dominio di $\vec{F}$ e dire se è un insieme semplicemente connesso.

b) Verificare che $\vec{F}$ è irrotazionale.

c) Calcolare

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

d) Stabilire, di conseguenza, se $\vec{F}$ è conservativo.

Soluzione: a) Osserviamo che F é definito dove il denominatore non si annulla, cioé per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non é semplicemente connesso.

b) $$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-6y^2(4x^2+y^6)+2y^3 \cdot 6y^5}{(4x^2+y^6)^2} = \frac{-24x^2y^2+6y^8}{(4x^2+y^6)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{6y^2(4x^2+y^6)-6xy^2 \cdot 8x}{(4x^2+y^6)^2} = \frac{6y^8-24x^2y^2}{(4x^2+y^6)^2}$$

Dato che risulta $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, F é irrotazionale

c) Per definizione $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$.

Calcoliamo $\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{3}(\sin t)^{-2/3} \cdot \cos t\right)$. Quindi

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2\sin t}{4 \cdot \frac{1}{4}\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin t\right) + \frac{3\cos t(\sin t)^{2/3}}{4 \cdot \frac{1}{4}\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \frac{1}{3}(\sin t)^{-2/3} \cdot \cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi$$

d) Osserviamo che γ é una curva chiusa, perché $\gamma(0) = (\frac{1}{2}, 0)$ e $\gamma(1) = (\frac{1}{2}, 0)$. Quindi $\vec{F}$ non é conservativo, dato che $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} \neq 0$.