

Esercizio 1. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy al variare dei parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) + e^t \\ y(0) = \beta. \end{cases}$$

Soluzione: Si tratta di un'equazione lineare di ordine 1 con $a(t) = -\alpha$, quindi moltiplichiamo per $e^{-\alpha t}$ e otteniamo

$$y'(t)e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t}y(t) = e^{t-\alpha t} \rightarrow \frac{d}{dt}(y(t)e^{-\alpha t}) = e^{(1-\alpha)t} \quad (1)$$

Integrando su $[0, t]$ otteniamo, nel caso $\alpha \neq 1$

$$y(t)e^{-\alpha t} - y(0) \cdot e^{-\alpha \cdot 0} = \frac{e^{(1-\alpha)t} - 1}{1-\alpha}$$

e quindi, dato che $y(0) = \beta$ troviamo

$$y(t)e^{-\alpha t} - \beta = \frac{e^{(1-\alpha)t} - 1}{1-\alpha}, \text{ da cui } y(t) = \beta e^{\alpha t} + \frac{e^t - e^{\alpha t}}{1-\alpha}.$$

Consideriamo infine il caso $\alpha = 1$, in cui (1) diventa

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-t}) = 1, \text{ e quindi } y(t)e^{-t} - y(0) = t, \text{ da cui}$$

$$y(t) = (\beta + t)e^t.$$

Esercizio 2. Si consideri la curva $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$\gamma(t) = \left(t^2, t - \frac{t^3}{3} \right) \quad \forall t \in [-1, 1].$$

- (a) Determinare se γ è chiusa.
- (b) Dimostrare che γ è una curva semplice.
- (c) Calcolare la lunghezza di γ .
- (d) Trovare le coordinate del baricentro di γ .

Soluzione: a) γ non è chiusa poiché $\gamma(-1) = (1, -\frac{2}{3})$ mentre $\gamma(1) = (1, \frac{2}{3})$.

b) γ è semplice perché la seconda componente è iniettiva.
Infatti $\gamma'_2(t) = 1 - t^2 > 0 \quad \forall t \in (-1, 1)$, quindi γ_2 è strettamente crescente in $[-1, 1]$ e di conseguenza è anche iniettiva.

c) Usiamo la formula integrale per la lunghezza

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 \|\gamma'(t)\| dt. \quad \text{Calcoliamo } \gamma'(t) = (2t, 1 - t^2),$$

$$\text{quindi } \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 1 + t^2.$$

$$\rightarrow L(\gamma) = \int_{-1}^1 (1 + t^2) dt = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

d) Il baricentro di γ è il punto $B = (x_B, y_B)$ dove

$$x_B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x ds = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 t^2 \cdot (1 + t^2) dt = \frac{3}{8} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} y ds = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) (1 + t^2) dt = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \left(t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{t^5}{3} \right) dt = \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} - \frac{t^6}{18} \right]_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_{\Omega} e^x dx dy dz,$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 - x^2, -e^x \leq z \leq 2ye^{-x}\}.$$

Soluzione: Calcoliamo l'integrale 'per fili rispetto a z ', cioè

notando che $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z \in [-e^x, 2ye^{-x}]\}$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Osserviamo anche che

$-e^x \leq 0 \leq 2ye^{-x}$ per ogni $(x, y) \in A$, quindi l'intervallo

$[-e^x, 2ye^{-x}]$ ha senso $\forall (x, y) \in A$. Quindi

$$\iiint_{\Omega} e^x dx dy dz = \iint_A dx dy \int_{-e^x}^{2ye^{-x}} e^x dz = \iint_A (2y + e^{2x}) dx dy$$

Calcoliamo ora l'integrale doppio notando che

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ e quindi

$$\begin{aligned} \iint_A (2y + e^{2x}) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} (2y + e^{2x}) dy = \int_{-1}^1 [(1-x^2)^2 + e^{2x}(1-x^2)] dx = \\ &= \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4 + e^{2x} - x^2 e^{2x}) dx = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} - \int_{-1}^1 x^2 e^{2x} dx \end{aligned}$$

Calcoliamo infine

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 e^{2x} dx &= \left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-2}}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\text{Infine } \iiint_{\Omega} e^x dx dy dz = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}e^{-2} = \frac{16}{15} + \frac{e^2}{4} + \frac{3}{4}e^{-2}.$$