Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t)^2 + A^2)\cos t \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Scrivere la soluzione al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare per quali valori di $A \in \mathbb{R}$ la soluzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione: a) Osserviamo che se $A=0$, allora la soluzione e' $y(t) \equiv 0$.

Altrimenti, se $A \neq 0$, abbiamo che $\frac{y'(t)}{y(t)^2+A^2} = \cos t$ e quindi

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)^2+A^2}\,d\tau = \int_0^t \cos\tau\,d\tau \Rightarrow \int_0^{y(t)} \frac{dy}{y^2+A^2} = \sin t \Rightarrow \frac{1}{A}\arctan\left(\frac{y(t)}{A}\right) = \sin t$$

$$\Rightarrow y(t) = A\tan(A\sin t)$$

b) Dato che $\sin(0)=0$, la soluzione e' definita nel più grande intervallo I contenente 0 per cui $A\sin t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\forall t \in I$.

Quindi, deduciamo che $I = \mathbb{R}$ se $|A| < \frac{\pi}{2}$, dato che in questo caso $A\sin t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Se invece $|A| \geq \frac{\pi}{2}$, esiste $t_0 > 0$ per cui $A\sin t_0 = \frac{\pi}{2}$, e quindi $|A\tan(A\sin t)| \to +\infty$ per $t \to t_0^-$. Di conseguenza $y(t)$ non può essere definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quindi la soluzione e' definita globalmente se e solo se $A \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi/2\right)$ (Ricordiamo che anche nel caso $A=0$ la soluzione $y(t) \equiv 0$ e' definita $\forall t \in \mathbb{R}$).

Esercizio 2. Trovare tutti i punti critici della seguente funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e stabilirne la natura (massimo locale, minimo locale o sella):

$$f(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^2 - xy^2.$$

Soluzione: Calcoliamo $\nabla f(x,y,z) = (3x^2 - y^2,\ 4y^3 - 2xy,\ 2z)$, quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 4y^3 - 2xy = 0 \rightarrow y = 0 \lor x = 2y^2 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Caso 1: $y = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0,0)$

Caso 2: $\begin{matrix} x = 2y^2 \\ y \neq 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 12y^4 - y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y^2 = \frac{1}{12} \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{12}}$, $x = 2y^2 = \frac{1}{6} \rightarrow \begin{matrix} \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right) \\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right) \end{matrix}$

Quindi i punti critici sono $(0,0,0)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right)$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -2y & 0 \\ -2y & 12y^2 - 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ La matrice è semidefinita positiva quindi non possiamo dedurre nulla con il criterio dell'Hessiana

Tuttavia, osserviamo che $f(0,0,0) = 0$, e $f(x,0,0) = x^3$ che è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$. Quindi $(0,0,0)$ è una sella.

$$Hf\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right) = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2/\sqrt{12} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{12}} & 2/3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ $\rightarrow$ è definita positiva perché è diagonale a blocchi e entrambi i blocchi sono definiti positivi. Infatti $\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{12}} \\ -\frac{2}{\sqrt{12}} & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{4}{12} = \frac{1}{3} > 0$ $\quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{12}} \\ -\frac{2}{\sqrt{12}} & 2/3 \end{pmatrix} = 5/3 > 0$

$$Hf\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{12} & 0 \\ 2/\sqrt{12} & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ è definita positiva per lo stesso motivo di sopra.

Quindi $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right)$ sono punti di minimo locale.

Esercizio 3. Siano

$$f(x,y) = 4x^2y + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2, \qquad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}.$$

(a) Dimostrare che la funzione f ammette massimo e minimo su K.

(b) Calcolare il massimo e il minimo di f sull'insieme K, e tutti i punti in cui f assume tali valori.

Soluzione: a) Osserviamo che f è continua perché è un polinomio, K è chiuso perché intersezione dei chiusi $\{4x^2+y^2 \leq 4\}$ e $\{y \geq 0\}$ ed è limitato perché $4x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ y \in [-2,2] \end{cases}$.

Quindi, per il Teorema di Weierstrass, f ammette max e min su K.

b) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, quindi il max e il min su K vanno cercati tra i punti critici interni e i punti di bordo.

Punti critici: $\nabla f(x,y) = \left(8xy,\ 4x^2 + 2y - \frac{4}{3}\right)$

$$\begin{cases} 8xy = 0 \\ 4x^2 + 2y - \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0 \vee y = 0. \quad \text{Se } x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3}$$

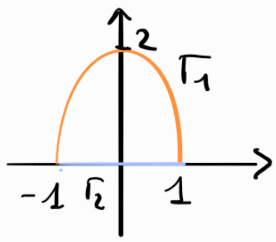
$$\text{Se } y = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quindi i punti critici sono $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, ma solo il primo è interno, mentre gli altri due sono sul bordo.

Studiamo ora il bordo, che è costituito da due pezzi:

$\Gamma_1 = \{4x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\}$

$\Gamma_2 = \{x \in [-1,1],\ y = 0\}$



Parametrizziamo Γ_2 usando $\gamma(t) = (t,0)$ con $t \in [-2,2]$ e vediamo che $F(\gamma_2(t)) = \frac{4}{9}$ $\forall t \in [-2,2]$, cioè f è costante su Γ_2 e

$$\min_{(x,y)\in\Gamma_2} f(x,y) = \max_{(x,y)\in\Gamma_2} f(x,y) = \frac{4}{9}.$$

Studiamo Γ_1 usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ricordando del vincolo ulteriore $y \geq 0$ e che quindi dovremo considerare anche gli "estremi" di Γ_1, cioè $(-1,0)$ e $(1,0)$.

1° sistema: $\begin{cases} 8x = 0 \\ 2y = 0 \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \rightarrow \nexists$ soluzioni

2° sistema: $\begin{cases} 8xy = \lambda \cdot 8x \rightarrow x=0 \vee y=\lambda \\ 4x^2+2y-\frac{4}{3} = \lambda \cdot 2y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases}$

Caso 1: $x=0 \rightarrow y^2=4 \rightarrow y=\pm 2 \rightarrow$ Scartiamo $(0,-2)$ che non sta in Γ_1 e quindi troviamo solo $(0,2)$

Caso 2: $y=\lambda \rightarrow \begin{cases} 4x^2+2y-\frac{4}{3}=2y^2 \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4-y^2+2y-\frac{4}{3}=2y^2 \\ x^2=1-\frac{y^2}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y^2-2y+\frac{8}{3}=0 \\ x^2=1-\frac{y^2}{4} \end{cases}$

$\rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{3}$. Scartiamo $y=-\frac{2}{3}<0$, quindi troviamo $y=\frac{4}{3}$, da cui $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Quindi troviamo i punti $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Riassumendo i possibili punti di minimo e massimo sono:

$\left(0,\frac{2}{3}\right), (0,2), \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$, a cui si aggiunge tutto il segmento Γ_2, su cui f è costante e vale $\frac{4}{9}$.

Osserviamo anche che gli estremi di Γ_1, cioè $(\pm 1, 0)$ sono già inclusi in Γ_2, quindi non serve aggiungerli.

Calcoliamo i valori nei punti trovati:

$f\left(0,\frac{2}{3}\right)=0 \quad f(0,2)=\frac{16}{9} \quad f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)=4\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{3}+\frac{4}{9}=\frac{92}{27}$.

$f(\underbrace{t,0}_{\Gamma_2}) = \frac{4}{9} \quad \forall t \in [-1,1]$.

Quindi $\min\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)=0$, ottenuto in $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ e $\max\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)=\frac{92}{27}$, ottenuto in $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{9}\right)$.