Secondo compitino di Analisi 2: Ingegneria Civile $10-04-2026$

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$\int\int_{\Omega} x dx dy, \quad \int\int_{\Omega} y dx dy$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \text{ t.c. } |x| < 1, x^2 - y > 0, y > 0\}$$

Esercizio 2

Calcolare il volume di Ω, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \text{ t.c.} |x| < 1, |x-y| < 1, 0 < x+z < 1\}$$

Esercizio 3

Dire se il seguente campo vettoriale e' conservativo:

$$\vec{F}(x,y) = (1 + ye^{xy}, xe^{xy} + cosy)$$

In caso affermativo calcolare la primitiva che vale 0 in $(0,0)$.

Soluzioni

1. Il dominio e' simmetrico ripetto all' asse y e la funzione x e' dispari rispetto allo stesso asse, quindi il primo integrale e' nullo.

   Per il secondo integrale osserviamo che

   $$\Omega = \{(x,y)| -1 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

   e quindi

   $$\int\int_{\Omega} y dx dy = \int_{-1}^{1} (\int_{0}^{x^2} y dy) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^4 dx = \frac{1}{5}$$

2. Descriviamo Ω come segue

   $$\Omega = \{(x,y) \in A, -x < z < 1-x\}$$

   dove

   $$A = \{(x,y)||x| < 1, |x-y| < 1\} = \{(x,y)|-1 < x < 1, x-1 < y < x+1.\}$$

   Integriamo ora per fili (rispetto all' asse z) e troviamo

   $$volA = \int\int\int_{\Omega} 1 dx dy dz$$

   $$= \int\int_{A} (\int_{-x}^{1-x} 1 dz) dx dy = \int\int_{A} 1 dx dy = \int_{-1}^{1} (\int_{x-1}^{x+1} 1 dy) dx$$

   $$= \int_{-1}^{1} 2 dx = 4$$

3. Essendo il campo vettoriale definito su R^2, che e' semplicemente connesso, basta verficiare se e' irrotazionale. Abbiamo

   $$\partial_y (1 + y e^{xy}) = e^{xy} + xy e^{xy}$$

   $$\partial_x (x e^{xy} + cos y) = e^{xy} + xy e^{xy}$$

   quindi il campo e' irrotazionale. Calcoliamo le primitive per integrazione. Cerchiamo quindi $U(x,y)$ tale che

   $$\partial_x U = 1 + y e^{xy}, \partial_y U = x e^{xy} + cos y.$$

Dalla prima troviamo

$$U(x,y) = x + e^{xy} + C(y)$$

e quindi derivando rispetto ad y questa identita', ed usando la seconda relazione imposta ad U, si ha

$$xe^{xy} + \partial_y C(y) = xe^{xy} + cosy$$

da cui

$$\partial_y C(y) = \cos y$$

ossia

$$C(y) = \sin y + C, C \in \mathbb{R}.$$

Quindi le primitive sono

$$x + e^{xy} + \sin y + C$$

e possiamo ora fissare C in modo che la primitva valga 0 in $(0,0)$, e si vede facilmente che questa relazione diventa

$$C = -1$$

e quindi la primitiva cercata e'

$$U(x,y) = x + e^{xy} + \sin y - 1$$