Secondo compitino EDP del $29 - 05 - 2026$

Esercizio 1
Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C > 0$ tale che il semigruppo del calore definito su $\mathbb{R}^n$ soddisfi la stima:

$$\|(t+|x|^2)^{\frac{n}{2}} e^{t\Delta} f\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leq C\|\langle x\rangle^{n+\varepsilon} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Esercizio 2
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato ed $u : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{1,2}_{t,x}(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$ tale che

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(t,x), & \forall (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ u(0,x) = g(x), & \forall x \in \Omega \\ u(t,y) = 0, & \forall (t,y) \in [0,\infty) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Provare che per ogni $T > 0$ vale la stima:

$$\max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} |u(t,x)| \leq \max_{\bar{\Omega}} |g(x)| + T \max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} |f|.$$

(Sugg.: potrebbe essere utile considerare la funzione $v(t,x) = u(t,x) - Mt$ dove $M = \max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} |f|$)

Soluzioni

Esercizio 1

Separiamo la stima in due stime separate:

$$\|t^{\frac{n}{2}}e^{t\Delta}f\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leq C\|\langle x\rangle^{n+\varepsilon}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\||||x|^n e^{t\Delta}f\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leq C\|\langle x\rangle^{n+\varepsilon}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

La prima stime segue da (la prima stima sotto e' stata vista a lezione, mentre la seconda segue da Hölder):

$$\|e^{t\Delta}f\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}\|\langle x\rangle^{n+\varepsilon}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

La seconda stima segue da

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^n\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{|f(y)|}{\langle y\rangle^{n+\varepsilon}}dy \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,$$

che a sua volta segue da

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^n\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{\langle y\rangle^{n+\varepsilon}}dy \leq C, \quad \forall(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

L'integrale di sopra puo' essere spezzato in due regioni: $|y| < \frac{|x|}{2}$ e $|y| > \frac{|x|}{2}$. Nella prima zona abbiamo

$$\int_{|y|<\frac{|x|}{2}}|x|^n\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{\langle y\rangle^{n+\varepsilon}}dy \leq \int_{\mathbb{R}^n}|x|^n\frac{e^{-\frac{|x|^2}{16t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{\langle y\rangle^{n+\varepsilon}}dy \leq C\sup_{r>0}r^n e^{-\frac{r^2}{16}}$$

mentre nella seconda zona abbiamo

$$\int_{|y|>\frac{|x|}{2}}|x|^n\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{\langle y\rangle^{n+\varepsilon}}dy \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|y|^n}{\langle y\rangle^{n+\varepsilon}}\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}dy \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}dy = C.$$

Esercizio 2

La funzione $v(t,x) = u(t,x) - Mt$ soddisfa

$$\begin{cases}\partial_t v - \Delta v = f - M \leq 0\\ v(t,x) = -Mt, \ \forall(t,x)\in(0,\infty)\times\partial\Omega\end{cases}$$

Applicando il principio del max per soluzioni di $\partial_t v - \Delta v \leq 0$ abbiamo $\forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega$

$$u(t,x) - Mt \leq \max_{\bar{\Omega}\times[0,T]} v = \max\{\max_{\bar{\Omega}} v(0,x), 0\} = \max_{\bar{\Omega}} g(x)$$

da cui

$$u(t,x) \leq MT + \max_{\bar{\Omega}} |g(x)|, \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

La stessa stima vale per $-u(t,x)$ e quindi si conclude.