Primo compitino EDP del $17 - 04 - 2026$

Esercizio 1 Fissiamo $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, regolare, connesso, tale che $0 \in \Omega$. Dire, giustificando la risposta, se vale l' unicità nella classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, per i seguenti problemi al bordo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \alpha u + \partial_\nu u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ \partial_\nu u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \partial_\nu u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

dove $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Esercizio 2 Scopo dell' esercizio è sviluppare il metodo delle caratteristiche per l' equazione di Hamiltonianon-Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t u + h(x, \nabla_x u) = 0 \\ u(0, x) = \psi(x) \end{cases} \tag{1}$$

dove $h(x, \xi) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Siano $(x(t, y), \xi(t, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ le traiettorie del sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_\xi h(x, \xi) \\ \dot{\xi} = -\nabla_x h(x, \xi) \\ x(0) = y, \xi(0) = \nabla_y \psi(y) \end{cases}$$

al variare di $y \in \mathbb{R}^n$.

Assumiamo che:

$$x(t,y), \xi(t,y) \text{ siano definite per ogni } t \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$\mathbb{R}^n \ni y \to x(t,y) \in \mathbb{R}^n, \text{ sia un diffeomorfismo } \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Sia $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ una soluzione di (1):

1. provare che vale l'identità

$$\nabla_x u(t, x(t,y)) - \xi(t,y) = 0, \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;$$

2. calcolare $\frac{d}{dt} u(t, x(t,y))$ e dedurre che vale la seguente identità:

$$u(t, x(t,y)) = \psi(y) - th(y, \nabla_y \psi(y)) + \int_0^t \nabla_\xi h(x(\tau,y), \xi(\tau,y)) \cdot \xi(\tau,y) d\tau,$$
$$\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

[Sugg: per il punto 1. potrebbe essere utile calcolare $\frac{d}{dt}(\nabla_x u(t, x(t,y) - \xi(t,y))$ ed osservare che $\nabla_x u(0, x(0,y) - \xi(0,y) = 0$]

Soluzioni

Esercizio 1 Per il primo problema consideriamo $w = u_1 - u_2$ la differenza di due soluzioni. Allora w risolve lo stesso problema con $\varphi = 0$. Moltiplichiamo l' equazione di w per w ed otteniamo per G-G l'identita'

$$0 = \int_\Omega w\Delta w dx = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_{\partial\Omega} w\partial_\nu w d\sigma = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \alpha\int_{\partial\Omega} |w|^2 d\sigma$$

da cui $w = 0$ e quindi $u_1 = u_2$. Per il secondo problema non c'è unicità, infatti se u è soluzione, anche $u + C$ è soluzione con C costante arbitraria. Per il terzo problema invece, ragionando come sopra otteniamo che se $w = u_1 - u_2$, allora

$$0 = \int_\Omega w\Delta w dx = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_{\partial\Omega} w\partial_\nu w d\sigma = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx$$

da cui $w = const$. Ma essendo $w(0) = u_1(0) - u_2(0) = \lambda - \lambda = 0$ abbiamo che $w = 0$ e quindi $u_1 = u_2$.

Esercizio 2 Per il punto 1. calcoliamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\nabla_x u(t, x(t,y)) - \xi(t,y)) \\
&\quad = \partial_t \nabla_x u[t, x(t,y)] + Hess(u)[(t, x(t,y))]\dot{x}(t,y) + \nabla_x h[x(t,y), \xi(t,y)] \\
&\quad = -\nabla_x h(x, \nabla_x u(t,x))[t, x(t,y)] + Hess(u)[t, x(t,y)]\nabla_\xi h(x(t,y), \xi(t,y)) \\
&\qquad\qquad + \nabla_x h[x(t,y), \xi(t,y)] \\
&\quad = -\nabla_x h[x(t,y), \nabla_x u(t, x(t,y))] - Hess(u)[(t, x(t,y))]\nabla_\xi h[x(t,y), \nabla_x u(t, x(t,y)] \\
&\qquad + Hess(u)[t, x(t,y)]\nabla_\xi h(x(t,y), \xi(t,y)) + \nabla_x h(x(t,y), \xi(t,y)) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Se facciamo il prodotto scalare tra la precedente identità vettoriale con

$$\nabla_x u(t, x(t,y)) - \xi(t,y)$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_x u(t, x(t,y)) - \xi(t,y)\|^2 = (\nabla_x u(t, x(t,y)) - \xi(t,y)) \cdot G(t,y) \qquad (5)$$

dove

$$\begin{aligned}
G(t,y) &= -\nabla_x h(x(t,y), \nabla_x u(t, x(t,y))) + \nabla_x h(x(t,y), \xi(t,y)) \\
&\quad - Hess(u)[(t, x(t,y))](\nabla_\xi h(x(t,y), \nabla_x u(t, x(t,y)) - \nabla_\xi h(x(t,y), \xi(t,y))).
\end{aligned}$$

Ricordando il teorema di Lagrange per funzioni di più variabili, otteniamo

$$\|G(t,y)\| \leq C\|\nabla_x u(t,x(t,y)) - \xi(t,y)\|$$

e quindi per (5) e Cauchy-Schwartz otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_x u(t,x(t,y)) - \xi(t,y)\|^2 \leq C\|\nabla_x u(t,x(t,y)) - \xi(t,y)\|^2$$

ed essendo

$$\|\nabla_x u(0,x(0,y)) - \xi(0,y)\|^2 = 0$$

otteniamo che $\|\nabla_x u(t,x(t,y)) - \xi(t,y)\|^2 = 0$.
Per il punto 2. osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t,x(t,y)) &= \partial_t u[t,x(t,y)] + \nabla_x u[t,x(t,y)] \cdot \dot{x}(t,y) \\ &= -h(x(t,y), \nabla_x u[t,x(t,y)] + \nabla_x u[t,x(t,y)] \cdot \nabla_\xi h(x(t,y),\xi(t,y))\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che u risolve (1). Usando ora il punto 1. abbiamo

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t,y)) = -h(x(t,y),\xi(t,y)) + \xi(t,y) \cdot \nabla_\xi h(x(t,y),\xi(t,y)).$$

e quindi per integrazione si trova la formula desiderata, tenuto conto del fatto che l' hamiltoniana è conservata lungo il flusso hamiltoniano:

$$h(x(t,y),\xi(t,y)) = h(x(0,y),\xi(0,y)) = h(y, \nabla_y \psi(y)).$$