Corso di E.D.P.- Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2025/2026)

Prova scritta del 11 giugno 2026

Esercizio 1

Sia dato il seguente problema di Cauchy al variare di $a > 0, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = e^{-ax^2} \sin(bx). \end{cases}$$

- Provare che il problema ammette un' unica soluzione nella seguente classe
$$u \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap L^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap C^{1,2}_{t,x}((0,\infty) \times \mathbb{R});$$
- Calcolare esplicitamente tale soluzione.

Esercizio 2

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, siano $a_j(x), c(x) \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ per $j = 1, \cdots, n$, $c(x) \geq 0$ ed $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tale che:

$$\begin{cases} -\Delta u + \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_{x_j} u + c(x) u = 0, \text{ in } \Omega \\ u(x) = 0 \text{ su } \partial\Omega \\ u(x) \geq 0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

Provare che necessariamente $u = 0$.

1. Soluzioni

Esercizio 1
Osserviamo che le soluzioni limitate soddisfano il criterio di unicita' visto a lezione. Per provare l'esistenza basta considerare $e^{t\partial_x^2}(e^{-ax^2}\sin(bx))$. Andiamo ora a fare il calcolo esplicito:

$$e^{t\partial_x^2}(e^{-ax^2}\sin(bx)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{Im}\int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}e^{-ay^2+iby}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{Im}\int e^{-(\frac{1}{4t}+a)y^2+(\frac{x}{2t}+ib)y}dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{Im}\int e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4t}+a}y-\frac{(\frac{x}{2t}+ib)}{2\sqrt{\frac{1}{4t}+a}}\right)^2+\frac{(\frac{x}{2t}+ib)^2}{4(\frac{1}{4t}+a)}}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{Im}\, e^{\frac{(\frac{x}{2t}+ib)^2}{4(\frac{1}{4t}+a)}}\int e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4t}+a}y-\frac{(\frac{x}{2t}+ib)}{2\sqrt{\frac{1}{4t}+a}}\right)^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{Im}\, e^{\frac{\frac{x^2}{4t^2}-b^2+ib\frac{x}{t}}{(\frac{1}{t}+4a)}}\int e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4t}+a}y-\frac{(\frac{x}{2t}+ib)}{2\sqrt{\frac{1}{4t}+a}}\right)^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}e^{\frac{\frac{x^2}{4t^2}-b^2}{\frac{1}{t}+4a}}\sin\Big(\frac{bx}{1+4at}\Big)\int e^{-\left(y-\frac{(\frac{x}{2t}+ib)}{2\sqrt{\frac{1}{4t}+a}}\right)^2}\sqrt{\frac{4t}{1+4ta}}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}e^{\frac{x^2-4t^2b^2}{4t+16t^2a}}\sqrt{\frac{4t}{1+4ta}}\sin\Big(\frac{bx}{1+4at}\Big)\int e^{-(y-\frac{(\frac{x}{2t}+ib)}{2\sqrt{\frac{1}{4t}+a}})^2}dy$$

ed usando la tecnica dei residui, uguale a quella usata per calcolare l'antitrasfomata di Fourier della gaussiana otteniamo

$$e^{t\partial_x^2}(e^{-ax^2}\sin(bx))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{x^2-4t^2b^2}{4t+16t^2a}}\sqrt{\frac{4t}{1+4ta}}\sin\Big(\frac{bx}{1+4at}\Big)\int e^{-y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{x^2-4t^2b^2}{4t+16t^2a}}\sqrt{\frac{4t}{1+4ta}}\sin\Big(\frac{bx}{1+4at}\Big)\sqrt{\pi}$$

$$= e^{\frac{-x^2-4tax^2+x^2-4t^2b^2}{4t+16t^2a}}\sqrt{\frac{1}{1+4ta}}\sin\Big(\frac{bx}{1+4at}\Big)$$

$$= e^{\frac{-ax^2-tb^2}{1+4ta}}\sqrt{\frac{1}{1+4ta}}\sin\Big(\frac{bx}{1+4at}\Big)$$

Esercizio 2

Proveremo che $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = 0$, e quindi essendo $u \geq 0$ necessariamente $u = 0$. Iniziamo con il provare che se $v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta v + \sum_{j=1}^n a_j(x)\partial_{x_j} v + c(x)v < 0, \text{ in } \Omega \\ v(x) \geq 0 \text{ in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

allora

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v.$$

Se per assurdo ci fosse un punto $x_0 \in \Omega$ di massimo interno allora avremmo $-\Delta v(x_0) \geq 0, \nabla v(x_0) = 0, v(x_0) \geq 0$ da cui, per l' ipotesi sul segno di c avremmo $-\Delta v(x_0) + \sum_{j=1}^n a_j(x_0)\partial_{x_j} v(x_0) + c(x_0)v(x_0) \geq 0$ che contraddice l'ipotesi su v. Applichiamo quanto visto sopra scegliendo come v le seguenti funzioni:

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon e^{-kx_1}$$

per $\varepsilon > 0$ e k abbastanza grande in modo che

$$-\Delta e^{-kx_1} + \sum_{j=1}^n a_j(x)\partial_{x_j} e^{-kx_1} + c(x)e^{-kx_1} < 0.$$

Quindi per quanto provato sopra

$$\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$$

e quindi passando al limite per $\varepsilon \to 0$ concludiamo $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.