COMPITO ANALISI 2
ING. CIVILE 13-01-2023

1) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz$$

dove
$A = \{ (x,y,z) \mid |x+y| < 1,\ |x-y| < 1,\ 0 < z < x+y+2 \}$.

2) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\iint_C (y^2 + z^2)\, dS$$

dove C è il cono di vertice $(0,0,0)$ e base $\{ (x,y,z) \mid z = 1,\ x^2+y^2 \leq 1 \}$.

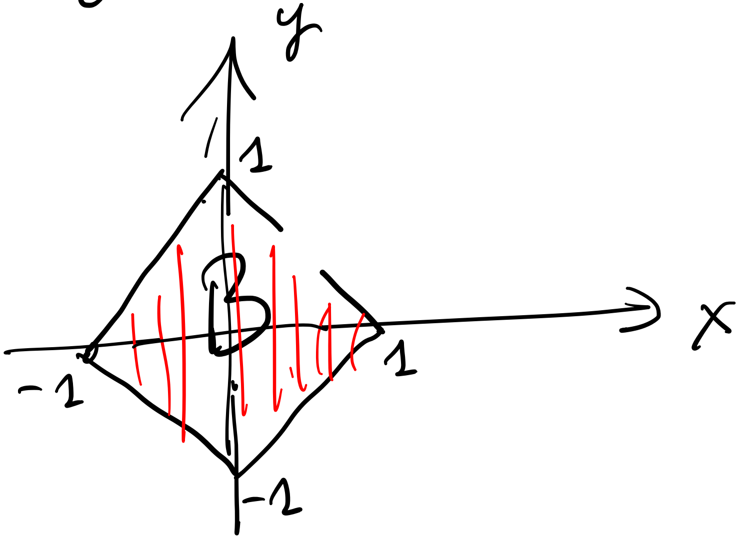
3) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = xy + x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

1) Integrando per fili si ha che l'integrale dato equivale a

$$\iint_B \frac{1}{2}(x+y+2)^2 \,dx\,dy$$

dove $B = \{(x,y) \mid |x+y| \le 1, |x-y| \le 1\}$



$$\iint_B \frac{1}{2}(x^2+y^2+4+2xy+4x+4y)\,dx\,dy$$

Si ha per simmetria che

$$\iint_B xy = 0, \quad \iint_B x = 0, \quad \iint_B y = 0, \quad \iint_B x^2 = \iint_B y^2$$

e quindi resta da calcolare

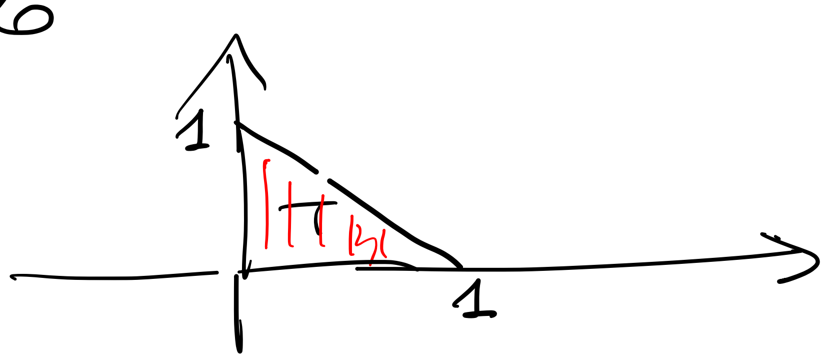
$$\iint_B x^2 dx\,dy + \iint_B 2\,dx\,dy = \iint_B x^2 dx\,dy + 2\,\text{Area}(B)$$

$$= \boxed{\iint_B x^2 dx\,dy + 4}$$

e quindi resta da calcolare

$$\iint_B x^2\,dx\,dy = 4\iint_T x^2\,dx\,dy$$

dove abbiamo usato di nuovo la simmetria e T è il seguente triangolo



Il triangolo T è normale rispetto ad y e quindi

$$4\iint_T x^2\,dx\,dy = 4\int_0^1 dx \int_0^{-x+1} x^2\,dy =$$

$$= 4\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}}$$

Quindi l'integrale dato vale:

$$\boxed{4+\frac{1}{3} = \frac{13}{3}}$$

2) Parametrizza prima le parti laterali del cono:

$$(u,\theta) \xrightarrow{\psi} (u\cos\theta, u\,\text{sen}\,\theta, u)$$

$$\cap$$

$[0,1]\times[0,2\pi]$

Osserviamo che

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = (-u\,\text{sen}\,\theta, u\cos\theta, 0)$$

quindi

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1 \\ -u\,\text{sen}\,\theta & u\cos\theta & 0\end{pmatrix} =$$

$$= (-u\cos\theta, -u\,\text{sen}\,\theta, u)$$

pertanto l'integrale nelle parti laterali è

$$\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} (u^2\,\text{sen}^2\theta + u^2)\sqrt{u^2 + u^2\cos^2\theta + u^2\,\text{sen}^2\theta}\; du\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} (u^3\,\text{sen}^2\theta + u^3)\; du\, d\theta = \boxed{\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right]}$$

Per quanto riguarda la base del cono parametrizzo come segue (sup. cartesiana)

$$\{u^2+v^2<1\} \ni (u,v) \longrightarrow (u,v,1)$$

e quindi con facili conti l'integrale sulla base è dato da:

$$\iint_{u^2+v^2<1} (1+v^2)\,du\,dv =$$

$$= \pi + \iint_{u^2+v^2<1} v^2\,du\,dv =$$

$$= \pi + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \pi + \frac{1}{4}\pi = \boxed{\frac{5}{4}\pi}.$$

Quindi l'integrale finale sarà

$$\boxed{\frac{5}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

3) Si ha che l' eq. equivale a

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}x$$

e quindi

$$y(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} - y(0) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}t\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$y(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}t\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0}^{t=x} = \boxed{-1+e^{\frac{x^2}{2}}}$$