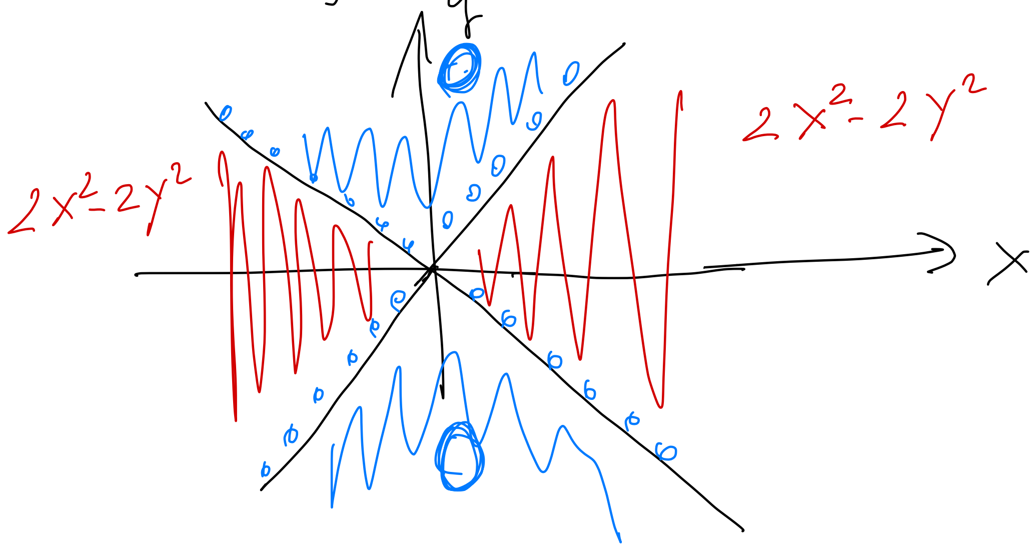
Primo compitino di Analisi 2
per Ingegneria Civile $12 - 12 - 2023$

Esercizio 1 Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ risulta differenziabile la funzione di due variabili
$$f(x,y) = |x^2 - y^2| + x^2 - y^2.$$
Esercizio 2 Sia data la funzione di due variabili
$$f(x,y) = \ln(1 + xy).$$
Rappresentare graficamente nel piano il dominio di f, trovare tutti i punti critici di f nel suo dominio e studiarne la relativa natura (max/min locale oppure sella).

Esercizio 3 Dire se esistono, giustificando la risposta, $\min_K f(x,y)$ e $\max_K f(x,y)$ dove
$$f(x,y) = x^2 + x(y-1) + y + y^2$$
e
$$K = \{(x,y)|x \geq 0, y \leq 0, 3 - x + y \geq 0\}$$
In caso affermativo calcolarli esplicitamente.

Esercizio 1

La funzione $f(x,y)$ ha la seguente rappresentazione



Abbiamo quindi 2 quadranti (in rosso) dove $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ e due quadranti (in blu) dove $f(x,y) = 0$. Pertanto nelle zone rosse e blu possiamo applicare il diff. totale.

Quindi gli unici punti in cui non possiamo usare il teorema del differenziale totale sono $\{(x,y) \mid x^2 = y^2\}$.

Consideriamo quindi un generico punto (x_0,y_0) t.c. $x_0^2 = y_0^2$ e studiamo la differenziabilità in questo punto (x_0,y_0).

Iniziamo con lo studio $\partial_x f(x_0,y_0)$.

Per definizione si ha:

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|(x_0+h)^2-y_0^2| + (x_0+h)^2-y_0^2 - \overset{\text{"}0}{|x_0^2-y_0^2|} - \overset{\text{"}0}{(x_0^2-y_0^2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h^2+2x_0h| + h^2+2x_0h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h||h+2x_0|}{h} + (h+2x_0).$$

Distinguiamo ora due casi $x_0=0$, $x_0>0$ e $x_0<0$.

Se $x_0=0$ allora abbiamo

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{h} + h = 0$$

Se $x_0>0$ allora abbiamo che per h piccoli $|h+2x_0| = h+2x_0$ e quindi

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|(h+2x_0)}{h} + (h+2x_0)$$ quindi abbiamo una somma di limiti dove $\lim_{h\to 0} h+2x_0 = 2x_0$ e $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}(h+2x_0)$ che N.E. poiché

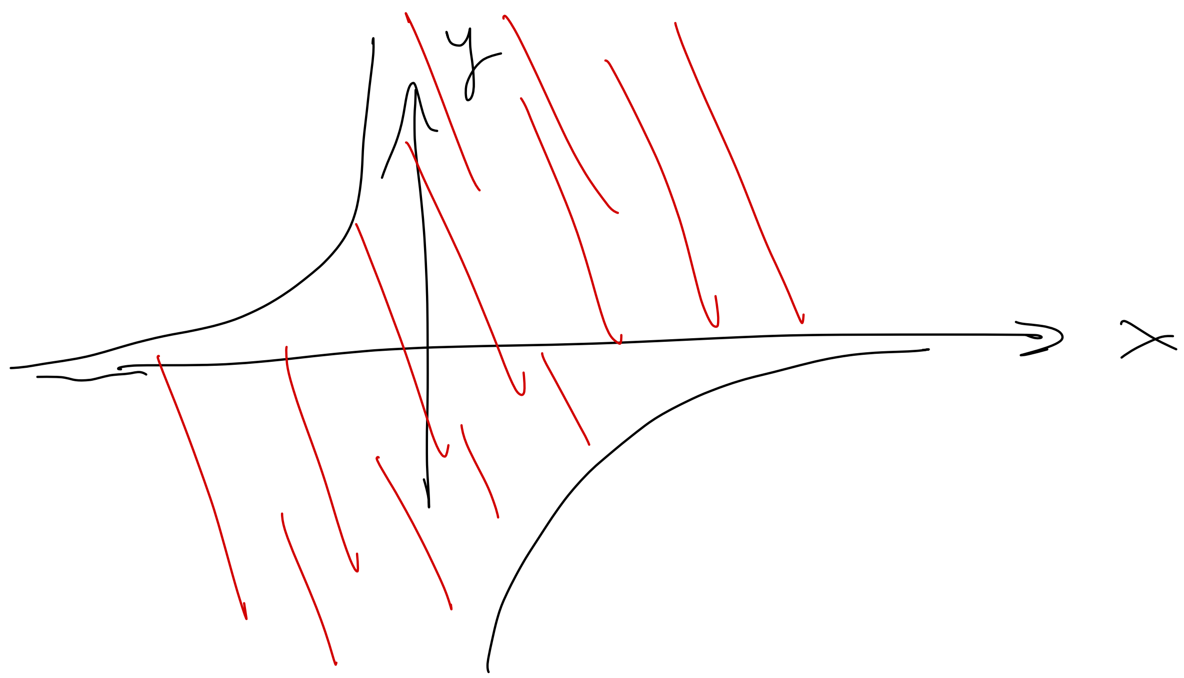
$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \text{ N.E. e } \lim_{h\to 0} h+2x_0 = 2x_0.$$

Se $x_0<0$ allora per h piccoli abbiamo $|h+2x_0| = -h-2x_0$ e quindi

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|(-h-2x_0)}{h} + h+2x_0$$ ed anche in questo caso il limite N.E.

Quindi l'unico punto (x_0,y_0) t.c. $x_0^2=y_0^2$ dove esiste $\partial_x f(x_0,y_0)$ è l'origine ed in tal caso $\partial_x f(0,0)=0$

Esercizio 2 Il dominio della funzione è dato dalla condizione $1+xy \geq 0$ che si rappresenta come segue in $\mathbb{R}^2$:



ossia la zona compresa tra i due rami dell'iperbole $xy+1=0$.

Studiamo ora i punti critici di f:

$$\begin{cases} \frac{y}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases} \iff x=0=y$$

quindi l'unico punto critico è $(0,0)$.

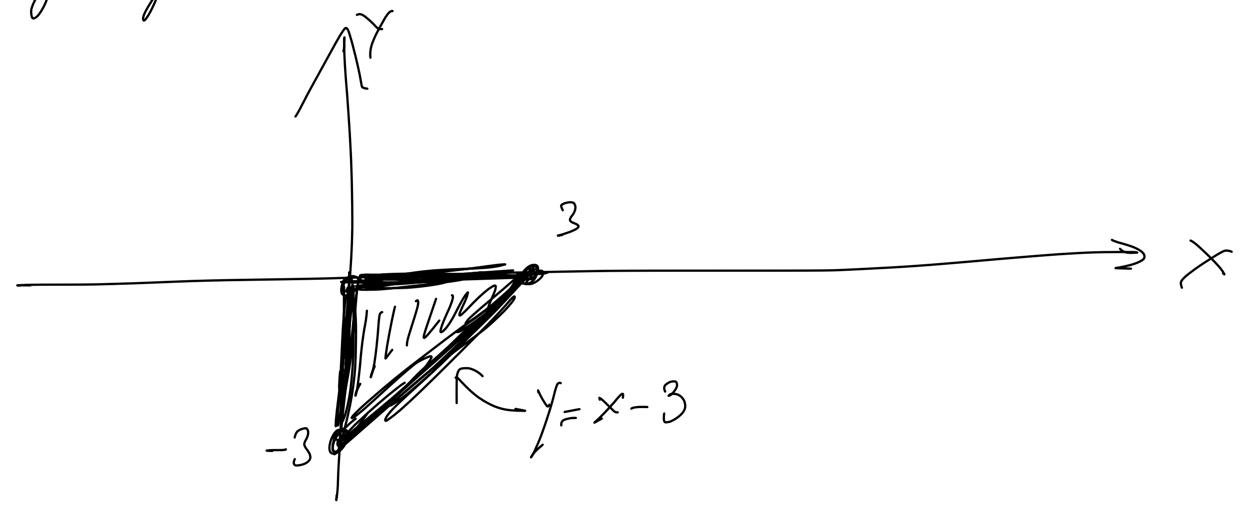
Resta da studiare la natura di $(0,0)$ e quindi scriviamo la matrice hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} \\ \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} & -\frac{x^2}{(1+xy)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & -\frac{x^2}{(1+xy)^2} \end{pmatrix}$$

e quindi $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Siccome il det di questa matrice è < 0, si deduce che $(0,0)$ è di sella.

Esercizio 3

Rappresentiamo graficamente K come segue:

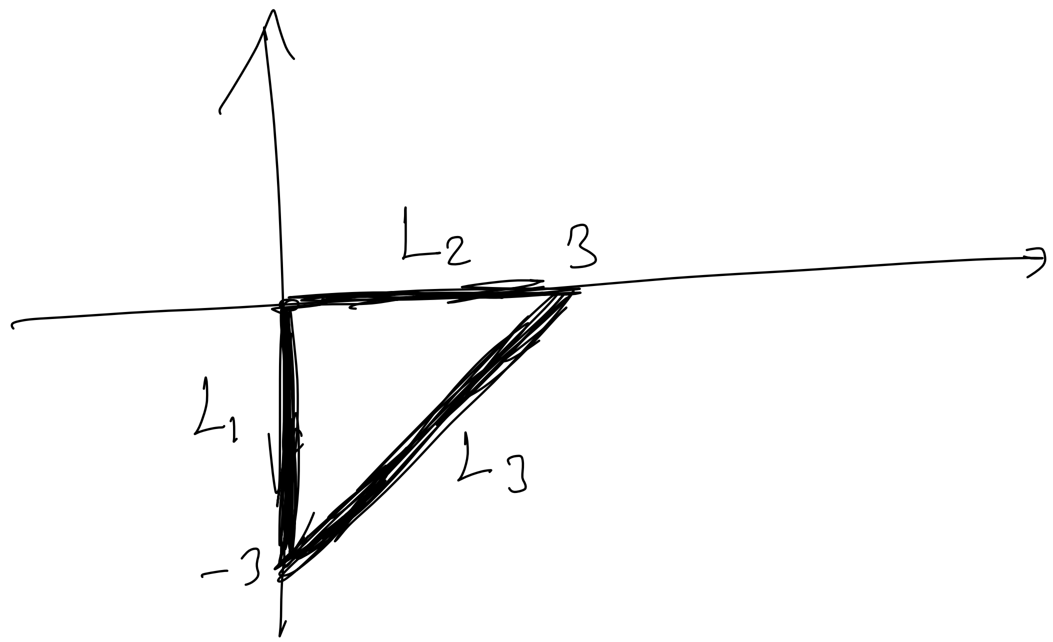


Pertanto K è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,-3)$. K inoltre include i lati del triangolo ed è quindi chiuso. Inoltre K è palesemente limitato. Infatti è incluso nella palla di centro $(0,0)$ e raggio 6. La funzione $f(x,y)= x^2+x(y-1)+y^2+y$ è continua e pertanto per il teorema di Weierstrass esistono $\min_K f$ e $\max_K f$.
Calcoliamo ora tali valori separando lo studio tra $\mathring{K}$ e ∂K.
Cerchiamo quindi i punti critici di f in $\mathring{K}$:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1-2x \\ x+2-4x+1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x,y)=(1,-1)} \in \mathring{K}.$$

Quindi abbiamo per ora individuato il punto $\boxed{(1,-1)}$

Studiamo ora ∂K che esprimiamo come unione di 3 segmenti L_1, L_2, L_3



Parametrizzo L_1 :

$\alpha_1 : [-3,0] \ni t \longrightarrow (0,t)$ ed $f \circ \alpha_1(t) = t^2+t$ da cui

$\max\limits_{L_1} f(x,y) = \max\limits_{t\in[-3,0]} t^2+t$ e $\min\limits_{L_1} f(x,y) = \min\limits_{t\in[-3,0]} t^2+t$

Osserviamo che la derivata di t^2+t vale $2t+1$ che si annulla per $t=-\frac{1}{2}$, quindi il max e min di t^2+t su $(-3,0)$ valgono $\max\{6,0,-\frac{1}{4}\}$ e $\min\{6,0,-\frac{1}{4}\}$.

Da cui $\boxed{\max\limits_{L_1} f = 6}$ e $\boxed{\min\limits_{L_1} f = -\frac{1}{4}}$

Per il lato L_2 usiamo la parametrizzazione:

$\alpha_2 : [0,3] \ni t \longrightarrow (t,0)$ da cui $f\circ\alpha_2(t) = t^2 - t$ da cui

$\max\limits_{L_2} f = \max\limits_{t\in[0,3]} t^2 - t$ e $\min\limits_{L_2} f = \min\limits_{t\in[0,3]} t^2 - t$.

Con semplici calcoli abbiamo

$\max\limits_{t\in[0,3]} t^2 - t = \max\left\{0,\ 6,\ -\frac{1}{4}\right\}$ e $\min\limits_{t\in[0,3]} t^2 - t = \min\left\{0, 6, -\frac{1}{4}\right\}$

$\cancel{3}\cdot\frac{9}{4} - 9\cdot\frac{3}{2} + 6$

$= -\frac{27}{4} + 6 = -\frac{3}{4}$

da cui $\boxed{\max\limits_{L_2} f = 6}$ e $\boxed{\min\limits_{L_2} f = -\frac{1}{4}}$.

Per il lato L_3 usiamo la parametrizzazione:

$\alpha_3 : [0,3] \ni t \longrightarrow (t, t-3)$ e quindi $f\circ\alpha_3(t) = t^2 + t(t-3) + (t-3)^2 + t - 3 =$
$= t^2 + t^2 - 3t + t^2 + 9 - 6t + t - 3 = 3t^2 - 9t + 6$

Pertanto $\max\limits_{L_3} f = \max\limits_{t\in[0,3]} 3t^2 - 8t + 6$ e $\min\limits_{L_3} f = \min\limits_{t\in[0,3]} 3t^2 - 9t + 6$.

Da semplici calcoli troviamo $\max\limits_{t\in[0,3]} 3t^2 - 9t + 6 = \max\left\{6, -\frac{3}{4}\right\}$ e $\min\limits_{t\in[0,3]} 3t^2 - 9t + 6 = \min\left\{6, -\frac{3}{4}\right\}$

da cui $\boxed{\max\limits_{L_3} f = 6}$ e $\boxed{\min\limits_{L_3} f = -\frac{3}{4}}$

Confrontando i valori trovati tra $\mathring{K}$ e ∂K si ha

$$\boxed{\max_K f} = \max\left\{ f(1,-1),\, 6,\, -\frac{3}{4} \right\} = \max\left\{ -1,\, 6,\, -\frac{3}{4} \right\} = \boxed{6}$$

$$\boxed{\min_K f} = \min\left\{ -1,\, 6,\, -\frac{3}{4} \right\} = \boxed{-1}.$$