

Terzo compito di Analisi 2
per Ingegneria Civile 29 – 05 – 2021

Esercizio 1 In un cassetto ci sono 10 banconote: due da 5 euro, due da 10 euro, due da 50 euro, due da 100 euro, due da 500 euro. Si estraggono contemporaneamente 4 banconote a caso, qual e' la probabilita' che:

- non ci sono banconote dello stesso valore;
- c'e' esattamente una coppia di banconote dello stesso valore;
- ci sono esattamente due coppie di banconote dello stesso valore.

Esercizio 2 Un signore va in vacanza e lascia la sua piantina ad un vicino. La probabilita' che la piantina muoia se non viene innaffiata e' dell' 80%, mentre la probabilita' che la piantina muoia se viene innaffiata e' del 15%. La probabilita' che il vicino si ricordi di innaffiare la piantina e' del 90%. Calcolare la probabilita' che:

- la piantina sia ancora viva al suo rientro;
- il vicino non abbia innaffiato la piantina, se al suo rientro la piantina fosse morta.

Esercizio 3 Una pubblicita' afferma che un' auto puo' fare 30 miglia con un gallone di benzina. Si fanno dieci esperimenti e si verifica che con quella quantita' di benzina l' automobile copre: 26,24,20,25,27,25,20,30,26,33. Assumendo che il chilometraggio che copre l' auto con un gallone di benzina sia una variabile aleatoria gaussiana rispondere alle seguenti domande:

- si puo' credere all' annuncio con fiducia del 95%?
- qual e' l' intervallo di confidenza per la media con fiducia del 99%?

Soluzioni

Esercizio 1

- Lo spazio di probabilita' e' costituito da tutte le quaterne che possiamo formare scegliendo 4 banconote. Possiamo fare la scelta di vedere queste quaterne come ordinate oppure no, se le vediamo come quaterne non ordinate allora lo spazio totale e' costituito da $\binom{10}{4}$ elementi. Il nostro evento, costituito da tutte le quaterne aventi banconote di valori distinti, e' costituito da $\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, infatti la prima banconota puo' essere scelta in modo arbitrario, la seconda deve essere scelta tra le otto rimanenti avendo escluso le due che hanno lo stesso valore della prima banconota estratta etc etc e ogni quaterna puo' essere ottenuto in $4!$ modi semplicemente permutando tra loro le monete selezionate. Quindi la probabilita' che ci interessa e' pari a $\frac{\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}} = \frac{8}{21}$
- Osserviamo che abbiamo 5 modi per scegliere la coppia di monete dello stesso valore e le altre 2 monete vanno scelte tra le 8 rimanenti escludendo che ci siano altre coppie dello stesso valore. Quindi ragionando come sopra nella scelta delle rimanenti due banconote, una volta scelto il valore di quelle uguali, si ha che l' evento che ci interessa ha cardinalita' $5 \times \frac{8 \times 6}{1 \times 2}$. Quindi la probabilita' cercata vale $\frac{\frac{8 \times 6 \times 5}{1 \times 2}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}} = \frac{8 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{4}{7}$
- Se ci sono due coppie dello stesso valore allora basta scegliere le coppie tra tutti i valori possibili, ossia $\binom{5}{2}$ e quindi la probabilita' diventa $\frac{\frac{5 \times 4}{1 \times 2}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}} = \frac{1}{21}$

Esercizio 2 Indichiamo con V l' evento la piantina e' viva, con I l' evento la piantina e' stata innaffiata. Inoltre con V^c e I^c indichiamo gli eventi complementari ossia la piantina e' morta e la piantina non e' stata innaffiata.

- A noi interessa $p(V)$, e quindi

$$\begin{aligned} p(V) &= p(V \cap I) + p(V \cap I^c) = p(V|I)p(I) + p(V|I^c)p(I^c) \\ &= \left(1 - \frac{15}{100}\right) \frac{90}{100} + \frac{20}{100} \frac{10}{100} = \frac{85 \times 9 + 20}{1000} = \frac{17 \times 9 + 4}{200} = \frac{157}{200} \end{aligned}$$

- A noi interessa $p(I^c|V^c)$, quindi osserviamo che

$$p(I^c|V^c) = \frac{p(I^c \cap V^c)}{p(V^c)} = \frac{p(V^c|I^c)p(I^c)}{p(V^c)}$$

ma dal punto precedente abbiamo $p(V^c) = 1 - p(V) = \frac{43}{200}$ e dalle ipotesi $p(I^c) = \frac{10}{100}$, $p(V^c|I^c) = \frac{80}{100}$ e quindi la probabilita' cercata e' pari a $\frac{16}{43}$

Esercizio 3

- Dobbiamo decidere se accettare o meno l' ipotesi nulla o l' ipotesi alternativa:

$$(H_0) \quad \mu = 30$$

$$(H_A) \quad \mu \neq 30$$

Calcolando media e varianza campionaria del campione si ha:

$$\bar{x} = 25.6, s_x = 15.82$$

dove s_x indica la varianza campionaria. Quindi la quantita' pivotate da considerare e' $\frac{|30-25.6|}{\sqrt{15.82}}\sqrt{10} \sim 3.50$ e il valore soglia con fiducia del 95% e' il valore $t_{9,0.975} = 2.2622$. Quindi (H_0) e' da rifiutare.

- Per calcolare l' intervallo di confidenza con fiducia al 99% abbiamo che

$$|\mu - 25.6| \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{15.82}} < t_{9,0.995}$$

dove $t_{9,0.995} = 3.2499$ quindi

$$21.53 = -3.2499 \times \frac{3.97}{\sqrt{10}} + 25.6 < \mu < 3.2499 \times \frac{3.97}{\sqrt{10}} + 25.6 = 29.67$$