Compito di Analisi 2 del $31-01-2024$, Ingegneria Civile

Esercizio 1 Dire se esistono, giustificando la risposta,

$$\max_B f(x,y,z), \min_B f(x,y,z)$$

dove

$$B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, f(x,y,z) = x-y-z.$$

In caso affermativo calcolare esplicitamente tali valori.

Esercizio 2 Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{-x-y} + e^x + e^{y+1}$$

e studiarne la natura (max/min loc, sella).

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma z dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z)|x^2+y^2+\frac{z^2}{2} = 1, x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}, z \geq 0\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 E' facile vedere che non ci sono punti critici interni e che il primo sistema da risolvere seguendo la tecnica di moltiplicatori di Lagrange non ha soluzioni. Quindi siamo ridotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ -1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si vede che $\lambda \neq 0$ Inoltre prima seconda equazione implicano $\lambda(x + y) = 0$ da cui (essendo$\lambda \neq 0$) $x + y = 0$. Inoltre dalla prima e terza troviamo similmente $x + z = 0$. Quindi le soluzioni sono del tipo $(a, -a, -a)$ e dalla quarta equazione segue $3a^2 = 1$ e quindi le soluzioni del sistema sono $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. E' facile quindi vedere che i valori di massimo e minimo cercati valgono $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 2 I punti critici di f sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} -e^{-x-y} + e^{x} = 0 \\ -e^{-x-y} + e^{y+1} = 0 \end{cases}$$

La prima e la seconda equazione implicano $e^x = e^{y+1}$ e quindi essendo la funzione esponenziale iniettiva si ha $x = y+1$. Sostituendo questa relazione nella prima equazione ed usando di nuovo le proprieta' della funzione esponenziale si deduce $x = -x - y = -x + 1 - x$ da cui $x = \frac{1}{3}$ e quindi $y = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$. Calcoliamo ora la matrice hessiana nel punto $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ e troviamo

$$\begin{pmatrix} 2e^{\frac{1}{3}} & e^{\frac{1}{3}} \\ e^{\frac{1}{3}} & 2e^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

Avendo questa matrice determinante e traccia positivi si. ha che il punto $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ e' di min locale.

Esercizio 3 La superficie Σ e' una superficie cartesiana essendo una porzione del grafico della funzione $g(x, y) = \sqrt{2 - 2x^2 - 2y^2}$, e quindi possiamo usare la parametrizzazione

$$\{(u, v) | u^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}\} \ni (u, v) \to (u, v, \sqrt{2 - 2u^2 - 2v^2})$$

Quindi l'integrale assegnato, tenuto conto ce per superfici cartesiane si ha

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla g|^2} dudv = \sqrt{\frac{2 + 2u^2 + 2v^2}{2 - 2u^2 - 2v^2}} dudv$$

pertando l' integrale assgenato si riduce a

$$\int \int_{u^2+v^2 \leq \frac{1}{4}} \sqrt{2 - 2u^2 - 2v^2} \sqrt{\frac{2 + 2u^2 + 2v^2}{2 - 2u^2 - 2v^2}} dudv$$

ed usando la polari

$$\cdots = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2 - 2\rho^2} \sqrt{\frac{2 + 2\rho^2}{2 - 2\rho^2}} \rho d\rho$$

e con il cambio di variabili $\rho^2 = t$ si trova

$$\cdots = \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{2 - 2t} \sqrt{\frac{2 + 2t}{2 - 2t}} dt$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{2 + 2t} = \frac{\pi}{3} [(2 + 2t)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi 2^{\frac{3}{2}}}{3} ((\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}} - 1)$$