Analisi 2 Ingegneria Civile $29-05-2026$

Esercizio 1 Calcolare il seguente flusso

$$\int\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \nu_{ext} dS$$

dove:

$$\nu_{ext} \text{ e' la normale esterna;}$$
$$\vec{F} = (2x, -y, z);$$
$$\Sigma = \partial\Omega, \text{ dove } \Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Esercizio 2

Calcolare il seguente flusso

$$\int\int_{\Sigma} rot\vec{F} \cdot \nu dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z)|z = 4 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 3\};$$
$$\vec{F} = \left(z^2, 2xy + x, x^2 + z(z-3)\ln(2 + \sin(x^2+y^2))\right);$$
$$\nu \text{ nel punto } (1,0,3) \text{ punta verso l'alto .}$$

Esercizio 3 Calcolare l'area della superficie Σ definita come segue:

$$\Sigma = \{(x,y,z)|x^2+y^2 = 2x, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Utilizziamo il teroema della divergenza e siamo ricondotti a calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_\Omega div\vec{F}dxdyz = \int\int\int_\Omega 2dxdyz = 2\times vol(\Omega) = 2\times\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\times\pi\times 27 = 9\pi$$

Esercizio 2 Utilizziamo Stokes ed osserviamo che il bordo di Σ contiene due circonferenze nello spazio:

$$\partial\Sigma_1 = \{(x,y,z)|x^2+y^2=1, z=3\}, \quad \partial\Sigma_2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2=4, z=0\}.$$

Tenuto conto della scelta di ν abbiamo che $\partial\Sigma_1$ va percorso in senso orario e $\partial\Sigma_2$ va percorso in senso antiorario. Utilizzeremo le seguenti paramterizzazioni per $\partial\Sigma_1$ e $\partial\Sigma_2$:

$$\gamma_1 : [0,2\pi] \ni t \to (\cos t, \sin t, 3)$$
$$\gamma_2 : [0,2\pi] \ni t \to (2\cos t, 2\sin t, 0)$$

dove γ_1 non e' coerente con il verso di percorrenza di $\partial\Sigma_1$, mentre γ_2 e' coerente con il verso di percorrenza di $\partial\Sigma_2$. Quindi usando Stokes il flusso cercato e' dato da

$$-\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot\vec{\tau}ds + \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{\tau}ds = -\int_0^{2\pi}(9, 2\sin t\cos t + \cos t, \cos^2 t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)dt$$
$$+\int_0^{2\pi}(0, 8\sin t\cos t + 2\cos t, 4\cos^2 t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)dt$$
$$= -\int_0^{2\pi}(-9\sin t + 2\sin t\cos^2 t + \cos^2 t)dt + \int_0^{2\pi}(16\sin t\cos^2 t + 4\cos^2 t)dt$$
$$= 3\pi$$

Esercizio 3 La superficie assegnata e' la superfiicie laterale del cilindro di base la circonferenza che giace nel paino x, y, di raggio 1 e centrata in $(1,0)$, intersecato con la palla tridimensionale di raggio 2 in $\mathbb{R}^3$. Quindi partendo dalla parametrizzazione del cilindro e tenuto conto dell' interesezione con la palla tridimensionale, possiamo usare la seguente parametrizzazione:

$$\Omega \ni (u,\theta) \to (1+\cos\theta, \sin\theta, u)$$

dove

$$\Omega = \left\{(u,\theta) | \theta \in (0,2\pi), u \in (-\sqrt{4-2(1+\cos\theta)}, \sqrt{4-2(1+\cos\theta)})\right\}$$

e quindi, usando la formula per l'area di una superifice parametrizzata siamo ricondotti a calcolare

$$\int\int_\Omega 1 du d\theta = \int_0^{2\pi} (\int_{-\sqrt{4-2(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{4-2(1+\cos\theta)}} du) d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta} d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1+\cos\theta}} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}} d\theta - 2\sqrt{2}\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}} d\theta$$

$$= -4\sqrt{2}[\sqrt{1+\cos\theta}]_0^\pi + 4\sqrt{2}[\sqrt{1+\cos\theta}]_\pi^{2\pi} = 16$$