Compito di Analisi 2 del $29-01-2025$, Ingegneria Civile

Esercizio 1 Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t} \\ y(-1) = 0, y'(-1) = e \end{cases}$$

Esercizio 2 Provare che esistono $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$K = \{(x,y) | \frac{1}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 9\}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{2} - y^2.$$

Calcolare esplicitamente $\max_K f$ e $\min_K f$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_{\Sigma} \frac{1}{z^4} dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) | z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 < z < 2\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Il polinomio caratteristico associato all' equazione omogenea e'

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

che ha come radice doppia $\lambda = -1$. Quindi la soluzione generale dell' omogenea e'

$$Ae^{-t} + Bte^{-t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell' equazione completa usando il metodo di variazione delle costanti, quindi una soluzione del tipo:

$$y(t) = A(t)e^{-t} + B(t)te^{-t}.$$

Calcoliamo

$$y' = A'e^{-t} - Ae^{-t} + B'te^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}$$

quindi se imponiamo

$$A'e^{-t} + B'te^{-t} = 0 \iff A' + B't = 0 \tag{1}$$

otteniamo

$$y' = -Ae^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}.$$

Imponiamo ora che y risolva l' equazione quindi:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-t}}{t} &= y'' + 2y' + y \\ &= -A'e^{-t} + Ae^{-t} + B'e^{-t} - Be^{-t} - B'te^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t} \\ &\quad -2Ae^{-t} + 2Be^{-t} - 2Bte^{-t} + Ae^{-t} + Bte^{-t} \\ &= -A'e^{-t} + B'e^{-t} - B'te^{-t} \end{aligned}$$

che equivale a

$$\frac{1}{t} = -A' + B' - B't$$

che a sua volta, grazie ad (1) equivale a

$$\frac{1}{t} = B'$$

quindi possiamo prendere $B(t) = \ln|t|$ ed anche da (1) abbiamo $A' = -1$ e quindi $A = -t$. Abbiamo quindi come soluzione particolare

$$-te^{-t} + te^{-t} \ln|t|.$$

Quindi la soluzione generale diventa

$$Ae^{-t} + Bte^{-t} - te^{-t} + te^{-t}\ln|t|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni di Cauchy si trova

$$0 = y(-1) = Ae - Be + e = 0 \iff A - B + 1 = 0.$$

$$e = y'(-1) = -Ae + 2Be - 2e + e \iff 1 = -A + 2B - 1$$

e quindi $A = 0$, $B = 1$. Pertanto la soluzione cercata e'

$$te^{-t}\ln|t|.$$

Esercizio 2 Cerchiamo i punti critici interni:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo o $y = 0$ o $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$. Se $y = 0$ troviamo dalla prima equazione $\frac{x}{|x|} = \frac{1}{2}$ che e' impossibile. Resta quindi $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$ che dalla prima equazione implica $x = \frac{1}{4}$. Usando ancora la prima equazione abbiamo $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}+y^2}} = 2$ che equivale a $y^2 + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ che equivale a $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$. Quindi i punti critici interni sono $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4})$ che appartengono alla parte interna di K.

Studiamo ora il bordo che e' fatto dalle due circonferenze

$$C_1 = \{(x,y)|x^2 + y^2 = \frac{1}{9}\} \text{ e } C_2 = \{(x,y)|x^2 + y^2 = 9\}.$$

Applichiamo su C_1 e C_2 separatamente il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. E' facile vedere che il primo sistema del metodo dei moltiplicatori di Lagrange associato a C_1 non ha soluzioni, quindi resta da considerare il secondo sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2} = 2\lambda x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deduciamo o $y = 0$ oppure $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2 = 2\lambda$. Nel primo caso deduciamo dalla terza equazione $x = \pm\frac{1}{3}$ quindi troviamo i punti $(\pm\frac{1}{3}, 0)$. Nel secondo caso otteniamo dalla prima equazione

$$2x + 2\lambda x - \frac{1}{2} = 2\lambda x \iff x = \frac{1}{4}$$

e quindi dalla terza equazione $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{12}$. Pertanto troviamo i punti $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{7}}{12})$. Passiamo ora al vincolo C_2. Anche in questo caso il primo sistema del metodo dei moltiplicatori di Lagrange non ha soluzione, risolviamo quindi il secondo sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2} = 2\lambda x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Anche in questo caso dalla seconda equazione abbiamo o $y = 0$ o $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2 = 2\lambda$. Se $y = 0$ troviamo dalla terza equazione $x = \pm 3$ e quindi $(\pm 3, 0)$. Nel caso $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2 = 2\lambda$ troviamo dalla prima equazione

$$2x + 2\lambda x - \frac{1}{2} = 2\lambda x \iff x = \frac{1}{4}$$

e quindi dalla terza equazione $y = \pm\frac{\sqrt{143}}{4}$, troviamo cosi' i punti $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{143}}{4})$. Quindi i punti su cui confrontare la funzione $f(x, y)$ sono:

$$(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}), (\pm\frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{7}}{12}), (\pm 3, 0), (\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{143}}{4}).$$

In questi punti la funzione $f(x, y)$ vale rispettivamente:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{16}, \frac{1}{3} \mp \frac{1}{6}, \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{7}{144}, 3 \mp \frac{3}{2}, 3 - \frac{1}{8} - \frac{143}{16}$$

che corrispondono ai valori

$$\frac{3}{16}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{23}{144}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{97}{16},$$

da cui il minimo vale $-\frac{97}{16}$ (che e' l' unico valore negativo tra quelli trovati) e il massimo vale $\frac{9}{2}$, visto che i primi quattro numeri sono minori di 1 ed il quinto che vale $\frac{3}{2}$ e' chiaramente minore di $\frac{9}{2}$.

Esercizio 3 La superficie Σ e' una porzione di grafico della funzione $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e puo' essere parametrizzata come segue

$$\Omega \ni (u,v) \to (u, v, \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}})$$

dove

$$\Omega = \{(u,v) | \frac{1}{4} < u^2+v^2 < 1\}$$

Abbiamo che, usando la formula d'integrazione su superfici cartesiane, l' integrale di superficie assegnato e' equivalente al seguente integrale doppio

$$\int\int_\Omega (u^2+v^2)^2 \sqrt{1 + \frac{u^2}{(u^2+v^2)^3} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^3}} dudv$$

$$= \int\int_\Omega (u^2+v^2)\sqrt{1+(u^2+v^2)^2} dudv$$

e passando alle coordinate polari questo integrale e' equivalente a

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+r^4}\; r^3 dr d\theta = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+r^4}\; r^3 dr = 2\pi \times \frac{1}{6}[(1+r^4)^{\frac{3}{2}}]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{\pi}{3}\Big(2^{\frac{3}{2}} - (\frac{17}{16})^{\frac{3}{2}}\Big).$$