Analisi 2 Ingegneria Civile $27-05-2024$

Esercizio 1

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x, y, z^2)$ lungo il bordo di Ω orientato secondo la normale esterna, dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -1 < z < -x^2 - y^2\}.$$

Esercizio 2

Data la seguente superficie parametrizzata

$$\{(u, v)|u^2 + v^2 < 4, u > 0, v > 0\} \ni (u, v) \to r(u, v) = (uv, u + v, u - v)$$

calcolarne l' area e l' equazione del piano tangente nel punto $(1, 2, 0)$.

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{(z + \cos y)}{\sqrt{1 + 4x^2 + \sin^2 y}} dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z)|z = x^2 - \cos y, (x, y) \in T\}$$

e T indica il triangolo nel piano (x, y) di vertici $(2, 0), (0, 3), (0, -2)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Usiamo il teorema della divergenza e siamo ricondotti al calcolo dell' integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega}(2+2z)dxdydz$$

dove

$$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2<1,-1<z<-x^2-y^2,\}$$

e quindi abbiamo

$$\int_{x^2+y^2<1}\int_{-1}^{-x^2-y^2}(2+2z)dz=\int_{x^2+y^2<1}[(2z+z^2)]_{z=-1}^{z=-x^2-y^2}$$

$$=\int_{x^2+y^2<1}[-2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2+1]dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}[-2\rho^2+\rho^4+1]\rho d\rho d\theta$$

$$=2\pi[-\frac{2}{4}\rho^4+\frac{1}{6}\rho^6+\frac{1}{2}\rho^2]_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 2

Calcoliamo il prodotto esterno tra $\frac{\partial r}{\partial u}=(v,1,1)$ e $\frac{\partial r}{\partial v}=(u,1,-1)$ che vale $(-2,v+u,v-u)$ e quindi l'area della superficie si calcola come segue:

$$\int\int_{u^2+v^2<4,u>0,v>0}\sqrt{4+(v+u)^2+(v-u)^2}dudv$$

$$=\int\int_{u^2+v^2<4,u>0,v>0}\sqrt{4+2v^2+2u^2}dudv=\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4+2\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{\pi}{12}[(4+2\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2=\frac{\pi}{12}12^{\frac{3}{2}}=2\pi\sqrt{3}.$$

Per calcolare il piano tangente in $(1,2,0)$ osserviamo che questo punto corrisponde nella parametrizzazione ad $(u,v)=(1,1)$ e quindi dal calcolo fatto prima del prodotto esterno abbiamo che il piano tangente in $(1,2,0)$ deve essere perpendicolare al vettore $(-2,2,0)$ e quindi il piano tangente risulta essere $-2(x-1)+2(y-2)=0$ ossia $-x+y-1=0$.

Esercizio 3

La superficie e' cartesiana, rappresentata dalla porzione di grafico della funzione $x^2 - \cos y$ ristretta a T. Quindi una possibile parametrizzazione e'

$$T \ni (u,v) \to (u, v, u^2 - \cos v)$$

e quindi l' integrale di superficie dato si riduce al calcolo di

$$\int\int_T \frac{(u^2 - \cos v + \cos v)}{\sqrt{1 + 4u^2 + \sin^2 v}} \sqrt{1 + 4u^2 + \sin^2 v} dudv$$

$$= \int\int_T u^2 dudv$$

scriviamo ora T come dominio normale rispetto a v e troviamo

$$\int_0^2 \left(\int_{u-2}^{-\frac{3}{2}u+3} u^2 dv\right) du = \int_0^2 u^2 \left(-\frac{5}{2}u + 5\right) du$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{5}{2}u^3 + 5u^2\right) du = \left[-\frac{5}{8}u^4 + \frac{5}{3}u^3\right]_0^2 = \frac{10}{3}.$$