

Analisi 2, Ingegneria Civile 29 – 06 – 2025

Esercizio 1

Dire se esistono, giustificando la risposta, $\max_K f(x, y)$, $\min_K f(x, y)$ dove

$$f(x, y, z) = xy^2z$$

e

$$K = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}.$$

In caso affermativo calcolarli esplicitamente.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int \int \int_A x^2 dx dy dz$$

dove

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^4 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z^4, z \geq 0\}$$

Esercizio 3 Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + u = \frac{1}{1+e^t} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Essendo K chiuso e limitato ed f una funzione continua (in particolare un polinomio) possiamo applicare il teorema di Weierstrass. Per il calcolo esplicito cerchiamo prima i punti critici interni a K , risolviamo quindi

$$\begin{cases} y^2 z = 0 \\ 2xyz = 0 \\ xy^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $y = 0$ oppure $z = 0$. Nel primo caso le altre due equazioni sono automaticamente soddisfatte, quindi abbiamo soluzioni $(x, 0, z)$ con (x, z) arbitrari. Nel secondo caso $z = 0$ abbiamo che la seconda equazione è soddisfatta automaticamente, mentre la terza è soddisfatta solo se x oppure y sono nulle, quindi troviamo le soluzioni $(0, y, 0)$, $(x, 0, 0)$. In ogni caso in tutti questi punti la funzione f vale 0. Studiamo ora il bordo con i moltiplicatori di Lagrange. Il primo sistema è

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 0 \\ \frac{2}{9}y = 0 \\ 2z = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \end{cases}$$

che chiaramente non ha soluzioni. Passiamo al secondo sistema

$$\begin{cases} y^2 z = \frac{\lambda}{2}x \\ 2xyz = \frac{2}{9}\lambda y \\ xy^2 = 2\lambda z \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \end{cases}$$

Possiamo assumere $\lambda \neq 0$, altrimenti le prime tre equazioni si riducono al primo sistema studiato sopra dei punti critici, che abbiamo già considerato. Moltiplicando la prima per x , la seconda per y e la terza per z troviamo

$$\frac{\lambda}{2}x^2 = \frac{\lambda}{9}y^2 = 2\lambda z^2$$

e siccome, come detto sopra possiamo assumere $\lambda \neq 0$ si ha $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{9} = 2z^2$. Inserendo questi dati nella quarta equazione troviamo

$$x^2 = 1, \frac{2}{9}y^2 = 1, 4z^2 = 1$$

ossia $x = \pm 1, y = \pm \sqrt{\frac{9}{2}}, z = \pm \frac{1}{2}$. Siccome in tali punti la funzione f assume i valori $\pm \frac{9}{4}$ abbiamo che questi sono i valori di max e min.

Esercizio 2 Procediamo per sezioni ed osserviamo che

$$A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq \min\{2 - z^4, z^4\}, z \geq 0\}$$

e quindi abbiamo che per $z \in (0, 1)$ la sezione e' data da

$$A_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq z^4\}$$

e per $z \in (1, 2^{\frac{1}{4}})$ la sezione e' data da

$$A_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2 - z^4\}.$$

Abbiamo quindi che l' integrale si calcola come segue

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int \int_{x^2+y^2 \leq z^4} x^2 dx dy \right) dz + \int_1^{2^{\frac{1}{4}}} \left(\int \int_{x^2+y^2 \leq 2-z^4} x^2 dx dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{z^2} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta \right) dz + \int_1^{2^{\frac{1}{4}}} \left(\int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2-z^4}} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta \right) dz \\ &= \pi \int_0^1 \frac{z^8}{4} dz + \pi \int_1^{2^{\frac{1}{4}}} \frac{(2 - z^4)^2}{4} dz \\ &= \pi \int_0^1 \frac{z^8}{4} dz + \pi \int_1^{2^{\frac{1}{4}}} \frac{4 + z^8 - 4z^4}{4} dz \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{9} + 2^{\frac{1}{4}} - 1 + \frac{2^{\frac{9}{4}}}{9} - \frac{1}{9} - \frac{4}{5} \times 2^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(2^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \frac{2^{\frac{9}{4}}}{9} - \frac{4}{5} \times 2^{\frac{5}{4}} \right). \end{aligned}$$

dove abbiamo usate le coordinate polari per calcolare gli integrali doppi.

Esercizio 3 L'equazione e' lineare del primo ordine. Moltiplicando l' equazione per e^t abbiamo

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^t) = \frac{e^t}{1 + e^t}$$

da cui per integrazione

$$u(t)e^t = \int_0^t \frac{e^\tau}{1+e^\tau} d\tau$$

e quindi

$$u(t) = e^{-t} [\ln(1+e^\tau)]_0^t = e^{-t} [\ln(1+e^t) - \ln 2] = e^{-t} \ln \left(\frac{1+e^t}{2} \right).$$