Compito di Analisi 2 del $13-01-2025$, Ingegneria Civile

Esercizio 1 Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2(y-1) + \frac{2}{3}x^3 - 2xy + \frac{1}{2}y^2$$

e studiarne la natura (max/min loc, sella).

Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_\Omega x(y^2+z^2)dxdydz,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2 \geq y^2+z^2, x \geq 0\}.$$

Esercizio 3 Calcolare il flusso del campo $\vec{F} = (x, y, z^4)$ lungo la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \text{ t.c. } x^2+2y^2 = 1, z \in [0,1]\}$$

orientata seocndo la direzione normale ν che nel punto $(1,0,0)$ vale $(1,0)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1 Per cercare i punti critici risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x(y-1) + 2x^2 - 2y = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$$

Ricavando la y dalla seconda equazione e sostituendo nella prima troviamo

$$2x(2x - x^2 - 1) + 2x^2 - 2(2x - x^2) = 0 \iff x(4x - 2x^2 - 2 + 2x - 4 + 2x) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ or } -2x^2 + 8x - 6 = 0 \iff x = 0, 1, 3$$

quindi i punti critici sono $(0,0), (1,1), (3,-3)$. Per studiarne la natura calcoliamo la matrice hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - 2 + 4x & 2x - 2 \\ 2x - 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H(3,-3) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

E' facile quindi dedurre che $(0,0), (3,-3)$ sono punti di sella, e $(1,1)$ e' di minimo locale.

Esercizio 2 L' integrale puo' essere calcolato per fili osservando che Ω puo' essere scritto come segue:

$$\Omega = \{(x,y,z) \text{ t.c. } y^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}, \quad \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}\}$$

quindi l' integrale diventa

$$\int\int_{y^2+z^2\leq\frac{1}{2}} \Big(\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x(y^2+z^2)dx \Big) dydz$$

$$= \frac{1}{2} \int\int_{y^2+z^2\leq\frac{1}{2}} (y^2+z^2)(1 - 2y^2 - 2z^2) dydz$$

e quindi usando ora le coordinate polari abbiamo che l' integrale assegnato e' uguale a

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^3 (1 - 2\rho^2) d\rho d\theta$$

$$= \pi[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{3}\rho^6]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi(\frac{1}{16} - \frac{1}{24}) = \frac{\pi}{48}$$

Esercizio 3 La superficie Σ rappresenta la superficie laterale (escluse le basi) di un cilindro avente per base un'ellisse. Se vogliamo applicare il teorema della divergenza dobbiamo aggiungere i due tappi, dati dalla base inferiore e dalla base superiore. A tal fine introduciamo

$$\Omega = \{(x, y, z) \text{ t.c. } x^2 + 2y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$$

allora si ha che

$$\partial\Omega = \Sigma \cup T_1 \cup T_2$$

dove

$$T_1 = \{(x, y, 0) \text{ t.c. } x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$
$$T_1 = \{(x, y, 1) \text{ t.c. } x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Quindi abbiamo

$$Flusso(\vec{F}, \partial\Omega, \vec{\nu}_{ext}) = \int\int\int_\Omega div(\vec{F}) dxdydz = \int_0^1 dz \int\int_{x^2+2y^2\leq 1} (2+4z^3) dxdy$$

$$= \int_0^1 (2 + 4z^3) Area(x^2 + 2y^2 \leq 1) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(2 + 3) = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}.$$

Osserviamo che ν_{ext} e' coerente con ν su Σ ed inoltre $\nu_{ext} = (0, 0, -1)$ sul tappo T_1 e $\nu_{ext} = (0, 0, 1)$ sul tappo T_2. Calcoliamo quindi

$$Flusso(\vec{F}, T_2, \nu_{ext}) = \int\int_{x^2+2y^2\leq 1} \vec{F}(x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) dxdy = \int\int_{x^2+2y^2\leq 1} dxdy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ed anche

$$Flusso(\vec{F}, T_1, \nu_{ext}) = \int\int_{x^2+2y^2\leq 1} \vec{F}(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dxdy = 0.$$

Quindi riassumendo abbiamo

$$\frac{5\pi}{\sqrt{2}} = Flusso(\vec{F}, \partial\Omega, \vec{\nu}_{ext})$$

$$= Flusso(\vec{F}, \Sigma, \vec{\nu}) + Flusso(\vec{F}, T_1, \vec{\nu}_{ext}) + Flusso(\vec{F}, T_2, \vec{\nu}_{ext})$$

$$= Flusso(\vec{F}, \Sigma, \vec{\nu}) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

da cui

$$Flusso(\vec{F}, \Sigma, \vec{\nu}) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}.$$