

Analisi 2 Ingegneria Civile 12 – 06 – 2026

Esercizio 1 Calcolare il seguente flusso

$$\int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \nu dS$$

dove:

$$\vec{F} = (x + y^4, 2y - z^3, x^2 - 3z);$$

$$\Sigma = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^4 = 1, z \geq 0\};$$

ν e' la normale che nel punto $(0, 0, 1)$ vale $(0, 0, 1)$.

Esercizio 2 Siano

$$f(x, y, z) = 2x^2 - \frac{y^2}{2} + z^3, \quad K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

- Dire (giustificando la risposta) se esistono $\max_K f$ e $\min_K f$;
- In caso affermativo, calcolare esplicitamente $\max_K f$ e $\min_K f$.

Esercizio 3 Calcolare il volume di Ω dove

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^4 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z^4, z \geq 0\}$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Il campo ha divergenza nulla, e la superficie Σ non è chiusa. Possiamo però chiuderla mettendo il tappo $T = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ dotato della normale $(0, 0, -1)$. Quindi abbiamo per il teorema della divergenza

$$0 = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \nu dS + \int \int_T \vec{F} \cdot (0, 0, -1) dS = 0$$

dove Ω è la regione di spazio racchiusa tra Σ e il tappo T . Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \nu dS &= - \int \int_T \vec{F} \cdot (0, 0, -1) dS = - \int \int_{u^2+v^2 \leq 1} u^2 du dv \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 2 Abbiamo che K è un insieme chiuso e limitato (infatti è limitato perché è una palla ed è chiusa perché nella sua definizione è incluso anche il suo bordo) ed f è continua (in particolare è un polinomio). Quindi per il teorema di Weierstrass esistono $\max_K f$ e $\min_K f$.

Cerchiamo i punti interni in cui si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -y = 0 \\ 3z^2 = 0 \end{cases}$$

che hanno come soluzione $(0, 0, 0)$. Sulla frontiera imponiamo il primo sistema di Lagrange

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

che non ammette soluzioni. Passiamo al secondo sistema di Lagrange

$$\begin{cases} 4x = 2\lambda x \\ -y = 2\lambda y \\ 3z^2 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema e dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $\lambda = 2$. Se $\lambda = 2$ allora dalla seconda e dalla terza troviamo $y = 0$ e $z = 0, \frac{4}{3}$. Quindi sfruttando la quarta equazione troviamo i punti

$$(\pm\sqrt{2}, 0, 0), (\pm\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{4}{3}).$$

Se invece $x = 0$ allora dalla seconda equazione abbiamo $y = 0$ oppure $\lambda = -\frac{1}{2}$. Nel caso $y = 0$ troviamo dalla quarta equazione

$$(0, 0, \pm\sqrt{2})$$

mentre se $\lambda = -\frac{1}{2}$ allora dalla terza equazione $z = 0$ oppure $z = -\frac{1}{3}$ e quindi dalla quarta equazione

$$(0, \pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm\frac{\sqrt{17}}{3}, -\frac{1}{3})$$

Calcolando f in tutti punti trovati sopra troviamo i valori:

$$0, 4, \frac{88}{27}, \pm 2\sqrt{2}, -1, -\frac{53}{54}$$

quindi il minimo vale $-2\sqrt{2}$ e il massimo 4.

Esercizio 3 Possiamo fare il volume per sezioni. Infatti abbiamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 2^{\frac{1}{4}}, (x, y) \in A_z\}$$

dove $A_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq z^4\}$ se $z \in (0, 1)$ e $A_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2 - z^4\}$ se $z \in (1, 2^{\frac{1}{4}})$. Quindi possiamo calcolare il volume come segue:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} 1 dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_{A_z} 1 dx dy \right) dz + \int_1^{2^{\frac{1}{4}}} \left(\int_{A_z} 1 dx dy \right) dz \\ &= \pi \int_0^1 z^4 dz + \pi \int_1^{2^{\frac{1}{4}}} (2 - z^4) dz \\ &= \frac{\pi}{5} + 2\pi(2^{\frac{1}{4}} - 1) - \frac{\pi}{5}(2^{\frac{5}{4}} - 1) = \pi\left(\frac{2}{5} + 8 \times \frac{2^{\frac{1}{4}}}{5} - 2\right) = \frac{8}{5}\pi(2^{\frac{1}{4}} - 1). \end{aligned}$$