Regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni

Eccesso L^2 per una funzione armonica

Lemma 1. *Esistono costanti dimensionali $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$ e $C > 0$ tali che per ogni funzione armonica $u \in H^1(B_R)$ e per ogni costante $A \in \mathbb{R}$, esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\left(\frac{1}{|B_{\kappa R}|}\int_{B_{\kappa R}} |u-a|^2\,dx\right)^{1/2} \le (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u-A|^2\,dx\right)^{1/2} \quad e \quad |A-a| \le C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u-A|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che $A = 0$. Osserviamo che

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|\,dx \le \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Di conseguenza, fissato $\tau \in (0,1)$, abbiamo che

$$\operatorname*{osc}_{B_{\tau R}} u = \max_{B_{\tau R}} u - \min_{B_{\tau R}} u \le \frac{2}{(1-\tau)^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|\,dx.$$

D'altra parte, per la disuguaglianza di Harnack,

$$\operatorname*{osc}_{B_{R\tau/2}} u \le (1-c_{\mathcal{H}}) \operatorname*{osc}_{B_{R\tau}} u,$$

dove $c_{\mathcal{H}} \in (0,1)$ è una costante dimensionale. Mettendo insieme le due stime e ponendo $\kappa := \tau/2$, otteniamo

$$\operatorname*{osc}_{B_{\kappa R}} u \le \frac{2(1-c_{\mathcal{H}})}{(1-\tau)^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|\,dx.$$

Scegliendo

$$a := \frac{1}{2}\Big(\max_{B_{\kappa R}} u + \min_{B_{\kappa R}} u\Big),$$

otteniamo che

$$2\left(\frac{1}{|B_{\kappa R}|}\int_{B_{\kappa R}} |u-a|^2\,dx\right)^{1/2} \le \operatorname*{osc}_{B_{\kappa R}} u.$$

In conclusione,

$$\left(\frac{1}{|B_{\kappa R}|}\int_{B_{\kappa R}} |u-a|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{1-c_{\mathcal{H}}}{(1-2\kappa)^d}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Quindi scegliendo κ abbastanza piccolo possiamo scegliere ε come

$$1-\varepsilon := \frac{1-c_{\mathcal{H}}}{(1-2\kappa)^d}.$$

Infine, siccome

$$|a| \le \frac{1}{2}\Big(\big|\max_{B_{\kappa R}} u\big| + \big|\min_{B_{\kappa R}} u\big|\Big) \le \frac{1}{(1-\kappa)^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |u|\,dx,$$

otteniamo anche la seconda stima della tesi con costante $C = (1-\kappa)^{-d}$. □

Lemma 2. *Esistono costanti dimensionali $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$ e $C > 0$ tali che per ogni funzione armonica $h \in H^1(B_R)$ e per ogni funzioni lineare $L(x) = A \cdot x$, esiste una funzione lineare $\ell(x) = a \cdot x$ tale che*

$$\left(\frac{1}{|B_{\kappa R}|}\int_{B_{\kappa R}} |\nabla u-a|^2\,dx\right)^{1/2} \le (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla u-A|^2\,dx\right)^{1/2} \quad e \quad |A-a| \le C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla u-A|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Dimostrazione. Segue dal lemma precedente e dal fatto che le derivate parziali di h sono funzioni armoniche. □

Regolarità Hölder dei gradienti

Proposizione 3. *Siano $B_\rho \subset \mathbb{R}^d$ e $v \in H^1(B_\rho)$ una funzione tale che:*

(i) *v è Lipschitz in B_ρ e $v(0) = 0$;*

(ii) *per ogni successione*
$$v_{r_n}(x) = \frac{1}{r_n} v(r_n v) \qquad \text{con} \qquad r_n \to 0,$$
esistono una funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ed una sottosuccessione v_{r_n} tali che
$$v_{r_n} \to L \quad \text{uniformemente in } B_R \quad \text{e} \quad \text{fortemente in } H^1(B_R),$$
per ogni palla $B_R \subset \mathbb{R}^d$.

(iii) *v soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità:*
$$\fint_{B_r} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le C r^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r < \rho\,,$$
dove $C > 0$ è una costante fissata, dove h è l'estensione armonica di v in B_r:
$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_r\,, \qquad h - v \in H^1_0(B_r).$$

Allora, esiste un'unica funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{r\to 0} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{r\to 0} \|v_r - L\|_{H^1(B_1)}.$$
In particolare, v è differenziabile in zero.

Osservazione 4. *Osserviamo che (come abbiamo dimostrato in precedenza) l'ipotesi* (ii) *segue da* (i) *e* (iii).

Dimostrazione di Proposizione 3. Sia $R > 0$ un raggio fissato. Definiamo
$$r_n = \kappa^n R,$$
dove κ è la costante dimensionale dal lemma precedente. Inoltre, sia h l'estensione armonica di v in B_{r_n}:
$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_{r_n}\,, \qquad h - v \in H^1_0(B_{r_n}).$$
Allora, per ogni funzione lineare $L_{n+1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ abbamo che
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v-L_{n+1})|^2\,dx\right)^{1/2} &\le \left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v-h)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(h-L_{n+1})|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&\le \frac{r_n^{d/2}}{r_{n+1}^{d/2}}\left(\frac{1}{r_n^d}\int_{B_{r_n}} |\nabla(v-h)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(h-L_{n+1})|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&\le C\frac{r_n^{d/2}}{r_{n+1}^{d/2}} r_n^{\alpha/2} + \left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(h-L_{n+1})|^2\,dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$
Ora, prendiamo $L_{n+1} := \ell$ del lemma precedente, dove $L := L_n$. Quindi
$$\left(\frac{1}{r_{n+1}^d}\int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v-L_{n+1})|^2\,dx\right)^{1/2} \le C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}\big(\kappa^{\alpha/2}\big)^n + (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{r_n^d}\int_{B_{r_n}} |\nabla(h-L_n)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$
Definendo
$$M_n := \left(\frac{1}{r_n^d}\int_{B_{r_n}} |\nabla(v-L_n)|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_{B_1} |\nabla(v_{r_n}-L_n)|^2\,dx\right)^{1/2},$$
otteniamo che
$$M_{n+1} \le C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}\big(\kappa^{\alpha/2}\big)^n + (1-\varepsilon)M_n,$$
con
$$|L_{n+1} - L_n| \le C_d M_n.$$
Sia
$$a_n := M_n + BX^n \qquad \text{dove} \qquad X := \kappa^{\alpha/2},$$

e dove la costante B è da scegliere.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= M_{n+1} + BX^{n+1} \\
&\le C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}X^n + (1-\varepsilon)M_n + BX^{n+1} \\
&\le (1-\varepsilon)a_n + C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}X^n - (1-\varepsilon)BX^n + BX^{n+1} \\
&\le (1-\varepsilon)a_n + X^n\Big(C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2} - (1-\varepsilon)B + BX\Big) \\
&= (1-\varepsilon)a_n + X^n\Big(C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2} - (1-\varepsilon-X)B\Big) \\
&= (1-\varepsilon)a_n,
\end{aligned}$$

dove abbiamo scelto

$$B := \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}}.$$

In conclusione,

$$M_n \le a_n \le (1-\varepsilon)^n\Big(M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}}\Big).$$

Ora, siccome

$$|L_{n+1} - L_n| \le C_d M_n \le C_d(1-\varepsilon)^n\Big(M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}}\Big).$$

Quindi L_n converge uniformemente ad L_∞ e

$$|L_\infty - L_n| \le C_d M_n \le \frac{C_d}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^n\Big(M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}}\Big).$$

Dunque,

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(v_{r_n} - L_\infty)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \left(1 + \frac{C_d}{\varepsilon}\right)(1-\varepsilon)^n\Big(M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}}\Big).$$

□