

Regolarità Hölder al bordo via la proprietà della media

ESTENSIONE DELLA SOLUZIONE DI UNA PDE

Lemma 1. *Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d , $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d/2$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Supponiamo inoltre che

$$u \geq 0 \quad \text{su } \Omega.$$

Allora

$$\Delta u + f \mathbb{1}_{\{u>0\}} \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^d.$$

In particolare, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx,$$

e che esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \geq u(x_0) - \frac{p C_d}{2p-d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo una funzione $p_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} p_\varepsilon(t) = 0 & \text{se } t \leq 0, \\ p_\varepsilon(t) = 1 & \text{se } t \geq \varepsilon, \\ 0 \leq p_\varepsilon(t) \leq 1 & \text{se } t \in [0, \varepsilon], \\ p'_\varepsilon(t) \geq 0 & \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Allora, $p_\varepsilon(u) \in H_0^1(\Omega)$. In particolare, data una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ in Ω , abbiamo che

$$p_\varepsilon(u)\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Di conseguenza,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (p_\varepsilon(u)\varphi) dx = \int_{\Omega} f p_\varepsilon(u)\varphi dx,$$

e quindi

$$\int_{\Omega} p_\varepsilon(u) \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi p'_\varepsilon(u) |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f p_\varepsilon(u)\varphi dx.$$

Siccome $\varphi \geq 0$ e $p'_\varepsilon(u) \geq 0$, otteniamo

$$-\int_{\Omega} p_\varepsilon(u) \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} f p_\varepsilon(u)\varphi dx \geq 0.$$

Ora, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$p_\varepsilon(u) \rightarrow \mathbb{1}_{\{u>0\}}$$

Lebesgue quasi-ovunque e (per la convergenza dominata) forte in L^1 . Di conseguenza,

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} f \mathbb{1}_{\{u>0\}} \varphi dx \geq 0,$$

che conclude la dimostrazione. □

REGOLARITÀ FINO AL BORDO

Lemma 2. Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d che soddisfa la stima di densità esterna, ovvero supponiamo che

esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0, 1)$ tali che

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$|B_r(x_0) \cap \Omega| \leq (1 - c)|B_r|.$$

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nonnegativa e tale che $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d/2$. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Allora, esistono due costanti, β (che dipende da p, d e c_0) e C (che dipende da p, d, c_0 e r_0), tali che

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq r^\beta C \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right) \quad \text{per ogni } r \leq r_0.$$

Dimostrazione. Consideriamo una costante $a \in (0, 1)$ che sceglieremo in seguito e definiamo

$$r_n := r_0 a^n \quad \text{per } n \geq 0.$$

Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Allora, per ogni $x \in B_{r_{n+1}}(x_0)$, abbiamo

$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(x) dx + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p},$$

dove scegliamo

$$r := r_n - r_{n+1} = (1 - a)r_n$$

in modo tale d'avere

$$B_r(x) \subset B_{r_n}(x_0).$$

Siccome $u \geq 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \frac{r_n^d}{(r_n - r_{n+1})^d} \frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{B_{r_n}(x)} u(x) dx + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p} \\ &\leq \frac{1}{(1 - a)^d} \frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{B_{r_n}(x)} u(x) dx + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p} \\ &\leq \frac{1}{(1 - a)^d} \frac{|\Omega \cap B_{r_n}(x_0)|}{|B_{r_n}|} \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p} \\ &\leq \frac{1 - c_0}{(1 - a)^d} \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p}. \end{aligned}$$

Siccome $x \in B_{r_{n+1}}(x_0)$ è arbitrario, otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r_{n+1}}(x_0))} \leq \frac{1 - c_0}{(1 - a)^d} \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} a^{n(2-d/p)}.$$

Ora, per un qualche $b > 1$ abbiamo che

$$\begin{aligned} b^{n+1} \|u\|_{L^\infty(B_{r_{n+1}}(x_0))} &\leq b^{n+1} \left(\frac{1 - c_0}{(1 - a)^d} \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} a^{n(2-d/p)} \right) \\ &\leq \frac{b(1 - c_0)}{(1 - a)^d} \left(b^n \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} \right) + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} b^{n+1} a^{n(2-d/p)}. \end{aligned}$$

Scegliamo b tale che

$$\frac{b(1 - c_0)}{(1 - a)^d} = 1.$$

Quindi

$$b^{n+1} \|u\|_{L^\infty(B_{r_{n+1}}(x_0))} \leq b^n \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} \frac{(1 - a)^d}{1 - c_0} \left(\frac{(1 - a)^d}{1 - c_0} a^{2-d/p} \right)^n.$$

Ora scegliamo $a > 0$ abbastanza piccolo in modo d'avere

$$\frac{1 - c_0}{(1 - a)^d} < 1 \quad (\text{quindi } b > 1) \quad \text{e} \quad \frac{(1 - a)^d}{1 - c_0} a^{2-d/p} < 1.$$

Quindi, esiste una costante C che dipende da d, p, c_0 ed r_0 tale che

$$b^n \|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} \leq \|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0))} + C \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{per ogni } n \geq 0.$$

Di conseguenza, esiste $\beta > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} \leq (r^n/r_0)^\beta \left(\|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0))} + C \|f\|_{L^p(\Omega)} \right) \quad \text{per ogni } n \geq 0,$$

e quindi

$$\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq (r/r_0)^\beta \left(b \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + C \|f\|_{L^p(\Omega)} \right) \quad \text{per ogni } r \leq r_0.$$

□

Proposizione 3. *Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d che ha la stima di densità esterna, ovvero supponiamo che*

esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0, 1)$ tali che

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$|B_r(x_0) \cap \Omega| \leq (1 - c)|B_r|.$$

Siano $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d/2$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Allora, esistono $\alpha \in (0, 1)$, $C > 0$ e $\delta > 0$ che dipendono solo da p, d, c_0 ed r_0 , tali che

$$|u(x) - u(y)| \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right) |x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^d \quad \text{tali che } |x - y| \leq \delta.$$