

## Iterazione di De Giorgi e stime $L^\infty$

### ITERAZIONE DI DE GIORGI E LIMITATEZZA DELLE SOLUZIONI

**Teorema 1.** *Sia  $\Omega$  un aperto di misura finita in  $\mathbb{R}^d$  e sia  $f \in L^p(\Omega)$ , dove  $p > \frac{d}{2}$ . Allora la soluzione debole  $u \in H_0^1(\Omega)$  di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

*è limitata e si ha la stima*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_{d,p} \|f\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{2p-d}{2pd}}.$$

*Dimostrazione.* Dimostreremo il teorema in dimensione  $d \geq 3$ . Supporremo inoltre che  $f \geq 0$ ; di conseguenza anche  $u \geq 0$  su  $\Omega$ .

Fissiamo ora  $t > 0$  e consideriamo la funzione test

$$u \wedge t.$$

Allora, l'ottimalità di  $u$  implica

$$\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx - \int u f(x) dx \leq \frac{1}{2} \int |\nabla(u \wedge t)|^2 dx - \int (u \wedge t) f(x) dx$$

che possiamo scrivere come

$$\frac{1}{2} \int |\nabla(u-t)_+|^2 dx \leq \int (u-t)_+ f(x) dx.$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned} \int (u-t)_+ f(x) dx &\leq \|f\|_{L^p} \left( \int (u-t)_+^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \left( \int (u-t)_+^{\frac{d}{d-2}} \right)^{\frac{d-2}{d}} |\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \left( \int (u-t)_+^{\frac{2d}{d-2}} \right)^{\frac{d-2}{2d}} |\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp} + \frac{d-2}{2d}}, \end{aligned}$$

dove

$$\Omega_t = \{u > t\}.$$

D'altra parte

$$C_d \int |\nabla(u-t)_+|^2 dx \geq \left( \int_{\Omega_t} (u-t)_+^{\frac{2d}{d-2}} dx \right)^{\frac{d-2}{d}}.$$

Di conseguenza,

$$\|(u-t)_+\|_{L^{2^*}} \leq C_d \|f\|_{L^p} |\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp} + \frac{d-2}{2d}}.$$

Fissando

$$T > t \quad \text{e} \quad \Omega_T = \{u > T\},$$

abbiamo che

$$\|(u-t)_+\|_{L^{2^*}} \geq (T-t) |\Omega_T|^{\frac{d-2}{2d}}$$

e quindi

$$(T-t) |\Omega_T|^{\frac{d-2}{2d}} \leq C_d \|f\|_{L^p} |\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp} + \frac{d-2}{2d}}.$$

Consideriamo le successioni

$$t_n = (1 - 2^{-n})T \quad \text{e} \quad M_n = |\Omega_{t_n}|$$

Di conseguenza,

$$T 2^{-n} M_{n+1}^{\frac{d-2}{2d}} \leq C_d \|f\|_{L^p} M_n^{\frac{2p-d}{dp} + \frac{d-2}{2d}}.$$

che scriviamo come

$$M_{n+1} \leq \frac{C_d \|f\|_{L^p}^{\frac{2d}{d-2}}}{T^{\frac{2d}{d-2}}} \left( 2^{\frac{2d}{d-2}} \right)^n M_n^{1+\varepsilon},$$

dove la costante  $\varepsilon > 0$  è definita come

$$\varepsilon = \frac{2p-d}{pd} \frac{2d}{d-2} > 0.$$

Ora, scegliendo  $T$  tale che

$$\frac{C_d \|f\|_{L^p}^{\frac{2d}{d-2}}}{T^{\frac{2d}{d-2}}} = \left(2^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{-1/\varepsilon} |\Omega|^{-\varepsilon},$$

abbiamo che (vedi Lemma 3)

$$|\Omega_T| = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$$

il che conclude la dimostrazione.  $\square$

**Esercizio 2.** Dimostrare il teorema precedente in dimensione  $d = 2$ .

**Lemma 3.** Siano  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $b > 1$  e  $K$  delle costanti positive e sia  $M_n$  una successione (di numeri reali positivi) tale che

$$M_0 = K \quad e \quad M_{n+1} \leq C b^n M_n^{1+\varepsilon}.$$

Se

$$C \leq \frac{1}{b^{1/\varepsilon} K^\varepsilon},$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

*Dimostrazione.* Dimostreremo per induzione che

$$M_n \leq K a^{-n},$$

dove  $a > 1$  è una costante che sceglieremo in seguito. Osserviamo che

$$M_{n+1} \leq C b^n M_n^{1+\varepsilon} \leq C b^n (K a^{-n})^{1+\varepsilon}$$

Per dimostrare il passo induttivo, bisogna scegliere  $a$  in modo tale che

$$C b^n (K a^{-n})^{1+\varepsilon} \leq K a^{-n-1},$$

ovvero tale che

$$C (b a^{-\varepsilon})^n \leq \frac{1}{a K^\varepsilon}.$$

Scegliendo

$$a := b^{1/\varepsilon},$$

otteniamo che se

$$C \leq \frac{1}{b^{1/\varepsilon} K^\varepsilon},$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0. \quad \square$$

**Proposizione 4.** Sia  $\Omega$  un aperto di misura finita in  $\mathbb{R}^d$  e sia  $f \in L^p(\Omega)$ , dove  $p > \frac{d}{2}$ . Allora la soluzione debole  $u \in H_0^1(\Omega)$  di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e per ogni  $t > 0$  si ha la stima

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \leq C_{d,p} \|f\|_{L^p} |\Omega_t|^{\frac{2p-d}{pd}},$$

dove

$$\Omega_t := \{u > t\}.$$

In particolare, quando  $p = \infty$ ,

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \leq C_d \|f\|_{L^\infty} |\Omega_t|^{\frac{2}{d}}.$$

---

STIME  $L^1 - L^\infty$  E  $L^2 - L^\infty$

**Corollario 5.** Sia  $\Omega$  un aperto di misura finita in  $\mathbb{R}^d$  e sia  $f \in L^p(\Omega)$ , dove  $p > \frac{d}{2}$ . Allora la soluzione debole  $u \in H_0^1(\Omega)$  di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_{d,p} \|f\|_{L^p}^{\frac{pd}{(d+2)p-d}} \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2p-d}{(d+2)p-d}}.$$

In particolare, quando  $p = \infty$ ,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+2}} \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2}{d+2}}.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$M = \sup_{x \in \Omega} u(x).$$

Allora, per ogni  $t \in (0, M)$  abbiamo

$$M - t \leq C |\Omega_t|^{2/d-1/p} \quad \text{dove} \quad C = C_{d,p} \|f\|_{L^p} \quad \text{e} \quad \Omega_t = \{u > t\}.$$

Di conseguenza

$$(M - t)^{\frac{pd}{2p-d}} \leq C^{\frac{pd}{2p-d}} |\Omega_t|$$

e integrando per  $t \in (0, M)$  otteniamo

$$\frac{M^{1+\frac{pd}{2p-d}}}{1+\frac{pd}{2p-d}} = \int_0^M (M-t)^{\frac{pd}{2p-d}} dt \leq C^{\frac{pd}{2p-d}} \int_\Omega u_+ \leq C^{\frac{pd}{2p-d}} \|u\|_{L^1(\Omega)},$$

il che conclude la dimostrazione. □

**Corollario 6.** Sia  $\Omega$  un aperto di misura finita in  $\mathbb{R}^d$  e sia  $f \in L^p(\Omega)$ , dove  $p > \frac{d}{2}$ . Allora la soluzione debole  $u \in H_0^1(\Omega)$  di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_{d,p} \|f\|_{L^p}^{\frac{pd}{4p-2d+pd}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4p-2d}{4p-2d+pd}}.$$

In particolare, quando  $p = \infty$ ,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+4}}.$$

*Dimostrazione.* Per esercizio. □