

Disuguaglianza di Harnack e oscillazione

Nella dimostrazione del teorema di De Giorgi mostreremo che se una funzione u è soluzione di

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

allora

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} u \leq (1 - c) \operatorname{osc}_{B_{2r}(x_0)} u,$$

per ogni $B_{2r}(x_0)$ strettamente contenuta in Ω (e abbastanza distante dal bordo di Ω). Per le funzioni armoniche questa stima è una conseguenza dalla classica disuguaglianza di Harnack.

1. DISUGUAGLIANZA DI HARNACK

Lemma 1 (Disuguaglianza di Harnack). *Esiste una costante dimensionale $C_{\mathcal{H}}$ tale che*

$$\max_{B_r(x_0)} h \leq C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h.$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ non-negativa e armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$. In particolare,

$$h(x_0) \leq C_{\mathcal{H}} \min_{B_r(x_0)} h.$$

Dimostrazione. Segue dalla proprietà della media e la positività di h . □

Una conseguenza immediata della disuguaglianza di Harnack è il seguente teorema di Liouville.

Teorema 2. *Se $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica e limitata dal basso,*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} u(x) > -\infty,$$

allora u è costante.

2. DISUGUAGLIANZA DI HARNACK E DECAY DELL'OSCILLAZIONE

Definizione 3. *Dati un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo l'oscillazione di u su A come*

$$\operatorname{osc}_A u = \operatorname{ess\,sup}_A u - \operatorname{ess\,inf}_A u.$$

In seguito scriveremo semplicemente \inf e \sup al posto di $\operatorname{ess\,inf}$ ed $\operatorname{ess\,sup}$.

Lemma 4 (Controllo dell'oscillazione). *Esiste una costante dimensionale $c \in (0, 1)$ tale che*

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} h \leq (1 - c) \operatorname{osc}_{B_{2r}(x_0)} h,$$

per ogni funzione $h : B_{2r}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ armonica in $B_{2r}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Per semplicità, definiamo

$$M(r) = \sup_{B_r(x_0)} h \quad \text{e} \quad m(r) = \inf_{B_r(x_0)} h,$$

per ogni $r > 0$. Mostriamo che

$$M(r) - m(r) \leq (1 - c)(M(2r) - m(2r)).$$

Consideriamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che

$$h(x_0) \geq \frac{M(2r) + m(2r)}{2}.$$

Consideriamo la funzione $h - m(2r)$

$$0 \leq h(x) - m(2r) \leq M(2r) - m(2r) \quad \text{per ogni } x \in B_{2r}(x_0).$$

Per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo

$$\frac{M(2r) + m(2r)}{2} - m(2r) \leq h(x_0) - m(2r) \leq C_{\mathcal{H}} \inf_{B_r(x_0)} (h(x) - m(2r)) = C_{\mathcal{H}} (m(r) - m(2r))$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{M(2r) - m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} + m(2r) \leq m(r)$$

Di conseguenza,

$$M(r) - m(r) \leq M(2r) - m(r) \leq M(2r) - \left(\frac{M(2r) - m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} + m(2r) \right) \leq \left(1 - \frac{1}{2C_{\mathcal{H}}} \right) (M(2r) - m(2r)).$$

Caso 2. Supponiamo ora che

$$h(x_0) \leq \frac{M(2r) + m(2r)}{2}.$$

Consideriamo la funzione $M(2r) - h$

$$0 \leq M(2r) - h(x) \leq M(2r) - m(2r) \quad \text{per ogni } x \in B_{2r}(x_0).$$

Per la disuguaglianza di Harnack, abbiamo

$$M(2r) - \frac{M(2r) + m(2r)}{2} \leq M(2r) - h(x_0) \leq C_{\mathcal{H}} \inf_{B_r(x_0)} (M(2r) - h(x)) = C_{\mathcal{H}} (M(2r) - M(r))$$

che possiamo riscrivere come

$$M(r) \leq M(2r) - \frac{M(2r) - m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}}.$$

Di conseguenza,

$$M(r) - m(r) \leq M(r) - m(2r) \leq M(2r) - \frac{M(2r) - m(2r)}{2C_{\mathcal{H}}} - m(2r) \leq \left(1 - \frac{1}{2C_{\mathcal{H}}} \right) (M(2r) - m(2r)).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Come corollario otteniamo la stima seguente.

Proposizione 5. *Esiste una costante dimensionale $\alpha \in (0, 1]$ tale che*

$$\|h\|_{C^{0,\alpha}(B_{R/2})} \leq \frac{C}{R^\alpha} \|h\|_{L^\infty(B_R)},$$

Per ogni funzione armonica $h : B_R \rightarrow \mathbb{R}$, dove C è una costante numerica e dove ricordiamo che

$$\|h\|_{C^{0,\alpha}(B_{R/2})} := \sup \left\{ \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in B_{R/2}, x \neq y \right\}.$$