Funzioni armoniche con dato Lipschitz al bordo. Esistenza e principio del confronto

1. Soluzioni di problemi ellittici con dato al bordo in H^1

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = g & \text{su} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$u - v \in H^1_0(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Definiamo inolltre il funzionale

$$J_f(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega vf \, dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1(\Omega).$$

Proposizione 1. *Siano Ω una aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Allora, data una funzione $u \in H^1(\Omega)$, sono equivalenti:*

(1) *u è soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u = g \quad su \quad \partial\Omega;$$

(2) *u è soluzione del problema variazionale*

$$\min\Big\{J_f(u) \ : \ u \in H^1(\Omega),\ u - g \in H^1_0(\Omega)\Big\}.$$

Proposizione 2. *Siano Ω una aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Allora, esiste un'unica soluzione $u \in H^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Osservazione 3. *La soluzione u di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u = g \quad su \quad \partial\Omega$$

si può scrivere come

$$u = u_0 + h,$$

dove:

- *$u_0 \in H^1_0(\Omega)$ è la soluzione del problema*

$$-\Delta u_0 = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

- *$h \in H^1(\Omega)$ è la soluzione di*

$$-\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Osservazione 4. *La soluzione u dipende solo del dato g al bordo, ovvero se g_1 e g_2 sono due funzioni tali che*

$$g_1 - g_2 \in H^1_0(\Omega),$$

allora le soluzioni u_1 e u_2 di

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 = f \quad in \quad \Omega, \qquad u_1 = g_1 \quad su \quad \partial\Omega, \\ -\Delta u_2 = f \quad in \quad \Omega, \qquad u_2 = g_2 \quad su \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

coincidono.

Osservazione 5. *Data una funzione $g \in H^1(\Omega)$, si definisce l'estensione armonica di g in Ω come la soluzione debole $h \in H^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

2. Principio del massimo debole

Teorema 6. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$ una funzione non-negativa. Sia h la funzione armonica*

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora, $h \geq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Siccome per ipotesi $(h-g) \in H^1_0(\Omega)$, abbiamo che anche $(h-g)_+$ e $(h-g)_-$ sono in $H^1_0(\Omega)$. Ora, siccome, g è non-negativa si ha che

$$0 \leq h_- \leq (h-g)_- \qquad \text{in} \qquad \mathbb{R}^d.$$

Di conseguenza,

$$h_- \in H^1_0(\Omega),$$

e quindi anche

$$h_+ - g \in H^1_0(\Omega).$$

Ora, siccome

$$\int_\Omega |\nabla h|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla h_+|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla h_-|^2\,dx \geq \int_\Omega |\nabla h_+|^2\,dx,$$

e siccome h minimizza l'integrale di Dirichlet fra tutte le funzione con dato al bordo g, abbiamo che

$$\int_\Omega |\nabla h_-|^2\,dx = 0.$$

Quindi, $h_- \equiv 0$. □

3. Funzioni armoniche con dato al bordo Lipschitz

Teorema 7. *Siano Ω un aperto limitato con bordo Lipschitz in $\mathbb{R}^d$. Sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora, esiste un'unica funzione $h \in H^1(\mathbb{R}^d)$, soluzione debole di*

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \\ \quad h = g \quad su \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che g sia una funzione lipschitziana su tutto $\mathbb{R}^d$. Inoltre, siccome Ω è limitato, possiamo anche supporre che il supporto di g sia limitato. Quindi $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$. In particolare, abbiamo l'esistenza di una soluzione debole di

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad h = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega.$$

□