Funzioni lipschitziane

Due definizioni equivalenti dello spazio di Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$

Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 1. *Data $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, diciamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ se esistono $v_1, \dots, v_d \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tali che*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi(x) u(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_j(x)\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Definiamo inoltre le derivate parziali ed il gradiente in senso debole di u come:

$$\partial_j u := v_j \qquad e \qquad \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u).$$

Inoltre, ricordiamo che data una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u - \varphi_n|^2\, dx + \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j u - \partial_j \varphi_n|^2\, dx \Big) = 0.$$

Lemma 2. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se esistono due costanti $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le C|y| \qquad \text{per ogni} \qquad |y| < \varepsilon,$$

allora $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $j = 1, \dots, d$ si ha $\|\partial_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C$.

Dimostrazione. Per ogni $j \in \{1, \dots, d\}$ ed ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiamo

$$L_j(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x)\, dx.$$

Osserviamo che, per il teorema della convergenza dominata, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x)\, dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \big(\varphi(x + te_j) - \varphi(x)\big)\, dx\,.$$

Di consegueza,

$$\begin{aligned} |L_j(\varphi)| \le \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x)\, dx \right| &= \lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \Big(\varphi(x + te_j) - \varphi(x)\Big)\, dx \right| \\ &= \lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(u(x - te_j) - u(x)\Big) \varphi(x)\, dx \right| \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Quindi L_j si può estendere ad un funzionale lineare limitato su $L^2(\mathbb{R}^d)$. Esiste quindi una funzione $v_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tale che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi(x) u(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_j(x)\, dx.$$

□

Lemma 3. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora,*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le |y| \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{per ogni} \qquad y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Fissiamo $y \in \mathbb{R}^d$ e consideriamo una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora,

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x)|^2 \le \left| \int_0^1 y \cdot \nabla \varphi(x + ty)\, dt \right|^2 \le \int_0^1 |y \cdot \nabla \varphi(x + ty)|^2\, dt \le |y|^2 \int_0^1 |\nabla \varphi|^2 (x + ty)\, dt.$$

Integrando in $x \in \mathbb{R}^d$ e usando il teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+y) - \varphi(x)|^2\, dx &\le |y|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla \varphi|^2 (x + ty)\, dt\, dx \\ &= |y|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^2 (x + ty)\, dx\, dt = |y|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^2\, dx. \end{aligned}$$

Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $\mathbb{R}^d$, abbiamo la tesi. □

Le funzioni lipschitziane a supporto compatto sono in $H^1(\mathbb{R}^d)$

Proposizione 4 (Lipschitz $\Rightarrow$ Sobolev)**.** *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ ed $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana supportata in B_R con costante di Lipschitz $L > 0$,*

$$|u(x) - u(y)| \le L|x-y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Allora, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Inoltre, se $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)$ è il gradiente debole di u, allora

$$\partial_j u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad e \qquad \|\partial_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le L\,,$$

per ogni $j = 1, \dots, d$. Più precisamente,

$$|\nabla u| \le L\,,$$

dove $|\nabla u|$ è la norma euclidea del gradiente debole.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, abbiamo che

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le |B_{R+\varepsilon}|^{1/2} L|y| \qquad \text{per ogni} \qquad |y| < \varepsilon.$$

Quindi, per Lemma 2, abbiamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Sia ora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una qualsiasi funzione test. Allora

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(x)\varphi(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx\right| \\ &= \lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\Big(\varphi(x+te_j) - \varphi(x)\Big)\,dx\right| \\ &= \lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} \Big(u(x-te_j) - u(x)\Big)\varphi(x)\,dx\right| \le L\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Quindi, approsssimando (in $L^1(\mathbb{R}^d)$) la funzione $\frac{1}{|B_r|}1_{B_r(x_0)}$ con funzioni regolari, otteniamo

$$\left|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} \partial_j u(x)\,dx\right| \le L.$$

Siccome $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ed $r > 0$ sono arbitrarie, otteniamo che

$$|\partial_j u(x_0)| \le L \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d\,.$$

Di conseguenza

$$\partial_j u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad \|\partial_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le L\,.$$

Analogamente, otteniamo che per ogni vettore fissato $\nu \in \partial B_1$ si ha

$$|\nu \cdot \nabla u(x_0)| \le L \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d\,,$$

e quindi

$$|\nabla u(x_0)| \le L \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d\,.$$

$\square$

Le funzioni Sobolev con gradiente debole in L^∞ sono lipschitziane

Proposizione 5. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Se $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora u è Lipschitziana e*

$$|u(x) - u(y)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}|x-y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$. Fissiamo un raggio $r > 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx - \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(y_0)} u(x)\,dx\right| &\le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\Big|u(x_0+x) - u(y_0+x)\Big|\,dx \\ &\le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\int_0^1 |x_0-y_0|\,|\nabla u|(y_0 + t(x_0-y_0) + x)\,dt\,dx \\ &\le L|x-y|.\end{aligned}$$

Quindi, per ogni coppia di punti di Lebesgue, x_0, y_0, abbiamo

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq L|x_0 - y_0|.$$

Infine, oserviamo che possiamo definire u in un punto qualsiasi $z \in \mathbb{R}^d$ come

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u(x_n),$$

dove x_n è una successione di punti di Lebesgue che converge a z. □

Funzioni lipschitziane e lo spazio $W^{1,\infty}$

Definizione 6. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^\infty(\Omega)$. Diciamo che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ se esistono funzioni*

$$v_1, \dots, v_d \in L^\infty(\Omega),$$

tali che

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega v_j(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

per ogni $j = 1, \dots, d$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. La funzione v_j è detta parziale derivata debole di u. Come al solito, scriveremo $\partial_j u$ al posto di v_j e ∇u al posto di $(v_1, \dots, v_d)$.

Teorema 7. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^\infty(\Omega)$.*

(i) *Se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \Omega,$$

allora $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L$.

(ii) *Se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$, allora*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_r(x_0).$$

Estensione di funzioni lipschitziane

Proposizione 8. *Siano K un insieme chiuso in $\mathbb{R}^d$, $L > 0$ ed $u : K \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in K.$$

Allora, esiste una funzione $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che $U \equiv u$ su K e

$$|U(x) - U(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ definiamo:

$$U(x) := \min\Big\{u(y) + L|x - y| \ : \ y \in K\Big\}.$$

Osserviamo prima che $u \equiv U$ su K. Infatti, se $x \in K$, allora per costruzione

$$U(x) \leq u(x).$$

D'altre parte, per ogni $y \in K$ abbiamo che

$$-L|x - y| \leq u(x) - u(y) \leq L|x - y|$$

e quindi

$$u(x) \leq u(y) + L|x - y|.$$

Prendendo il minimo in y, otteniamo:

$$u(x) \leq \min\Big\{u(y) + L|x - y| \ : \ y \in K\Big\} = U(x).$$

Dimostriamo ora che U è L-Lipschitz su $\mathbb{R}^d$. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ e siano $y_1, y_2 \in K$ due punti tali che:

$$U(x_1) = \min\Big\{u(y) + L|x_1 - y| \ : \ y \in K\Big\} = u(y_1) + L|x_1 - y_1|\,;$$

$$U(x_2) = \min\Big\{u(y) + L|x_2 - y| \ : \ y \in K\Big\} = u(y_2) + L|x_2 - y_2|\,.$$

Allora,

$$\begin{aligned} U(x_2) - U(x_1) &= \Big(u(y_2) + L|x_2 - y_2|\Big) - \min\Big\{u(y) + L|x_1 - y| \ : \ y \in K\Big\} \\ &\le \Big(u(y_2) + L|x_2 - y_2|\Big) - \Big(u(y_2) + L|x_1 - y_2|\Big) \\ &\le L|x_2 - y_2| - L|x_1 - y_2| \\ &\le L|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Analogamente $U(x_2) - U(x_1) \le L|x_2 - x_1|$. □

Corollario 9. *Sia Ω un insieme aperto e limitato in $\mathbb{R}^d$ ed $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$|u(x) - u(y)| \le L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \partial\Omega.$$

Allora, esiste una funzione lipschitziana $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che: $U \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $U \equiv u$ su $\partial\Omega$.

Gradiente debole e gradiente classico di una funzione Lipschitziana

Proposizione 10. *Supponiamo che $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sia una funzione Lipschitziana e tale che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Sia ∇u is gradiente in senso debole di u. Allora, per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si ha che:*

(i) *x_0 è un punto di Lebesgue per tutte le derivate parziali deboli $\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_d u$;*

(ii) *u è differeniabile in x_0 ed il gradiente di u in senso classico coincide con il gradiente debole coincidono:*

$$u(x + x_0) = u(x_0) + x \cdot \nabla u(x_0) + o(|x|) \qquad \text{dove} \qquad \nabla u(x_0) := \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \nabla u(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Rademacher abbiamo che u è differenziabile in quasi-ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Per il teorema di Lebesgue invece quasi-ogni punto è un punto di Lebesgue per ∇u. Rimane da dimostrare che se x_0 è un punto di Lebesgue per ∇u nel quale u è differenziabile, allora il gradiente distribuzionale di u coincide con quello classico. Per semplicità, supponiamo che $V = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ sia un vettore tale che

$$u(x + x_0) = u(x_0) + x \cdot V + o(|x|),$$

mentre useremo ∇u solo per indicare il gradiente debole di u.

Supponiamo che $x_0 = 0$. Sia φ una funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx = 1 \ , \qquad \varphi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_2 \ , \qquad \varphi = 1 \quad \text{in} \quad B_1 \ , \qquad 0 \le \varphi \le 1 \quad \text{in} \quad B_2 \setminus B_1 \ .$$

Definiamo inoltre la funzione

$$\varphi_r(x) := \frac{1}{r^d} \varphi(x/r).$$

Allora, sicome

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\partial_j u(x) - \partial_j u(0)|\, dx = 0,$$

abbiamo che

$$\lim_{r \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x) \Big(\partial_j u(x) - \partial_j u(0)\Big)\, dx = 0.$$

Ora, per la definizione di gradiente debole, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x) \Big(\partial_j u(x) - \partial_j u(0)\Big)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_r(x) \partial_j u(x)\, dx - \partial_j u(0) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi_r(x) u(x)\, dx - \partial_j u(0) \\ &= -\int_{B_{2r}} \frac{1}{r^{d+1}} (\partial_j \varphi)(x/r) u(x)\, dx - \partial_j u(0) \\ &= -\int_{B_2} \frac{1}{r} (\partial_j \varphi)(y) u(ry)\, dy - \partial_j u(0) \\ &= -\int_{B_2} (\partial_j \varphi)(y) \frac{u(ry) - u(0)}{r}\, dy - \partial_j u(0) \end{aligned}$$

Ora, siccome u è differenziabile in 0

$$\sup_{y\in B_2}\left|\frac{u(ry)-u(0)}{r}-y\cdot V\right|$$

tende a zero per $r\to 0$. Di conseguenza, passando al limite,

$$-\int_{B_2}\partial_j\varphi(y)y\cdot V\,dy=\partial_j u(0),$$

e integrando per parti,

$$v_j=\int_{B_2}\varphi(y)v_j\,dy=\int_{B_2}\varphi(y)\,\partial_j\Big(y\cdot V\Big)\,dy=\partial_j u(0),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Come corollario, otteniamo la proposizione seguente.

Teorema 11. *Siano Ω e $\widetilde{\Omega}$ due aperti limitati in $\mathbb{R}^d$. Sia*

$$\Phi=(\Phi_1,\dots,\Phi_d):\Omega\to\widetilde{\Omega}$$

una mappa Lipschitziana con inversa

$$\Psi=(\Psi_1,\dots,\Psi_d):\widetilde{\Omega}\to\Omega$$

lipschitziana. Allora, per ogni $u\in H^1_0(\widetilde{\Omega})$ si ha che $u\circ\Phi\in H^1_0(\Omega)$ e vale la formula

$$\nabla(u\circ\Phi):=D\Phi[\nabla u(\Phi)]\quad\textit{quasi-ovunque su}\quad\Omega$$

dove

$$\nabla u:=\begin{pmatrix}\partial_1 u\\ \vdots\\ \partial_d u\end{pmatrix}\qquad e\qquad D\Phi:=\begin{pmatrix}\partial_1\Phi_1 & \dots & \partial_1\Phi_d\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_d\Phi_1 & \dots & \partial_d\Phi_d\end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Osseviamo che se $u\in C^\infty_c(\widetilde{\Omega})$, allora $u\circ\Phi$ è Lipschitz ed ha supporto strettamente contenuto in Ω. Di conseguenza, $u\circ\Phi\in H^1_0(\Omega)$. Inoltre, siccome u, Φ e $u\circ\Phi$ sono differenziabili quasi-ovunque, la formula

$$\nabla(u\circ\Phi)=D\Phi[\nabla u(\Phi)]$$

vale quasi-ovunque in Ω. Sia ora, u_n una successione di funzioni in $C^\infty_c(\widetilde{\Omega})$ che converge a $u\in H^1_0(\widetilde{\Omega})$ fortemente in H^1 e piuntualmente in $\widetilde{\Omega}$. Allora, usando il cambio di variabile $y=\Phi(x)$, abbiamo che

$$\int_\Omega|u_n(\Phi(x))-u_m(\Phi(x))|^2\,dx=\int_{\widetilde{\Omega}}|u_n(y)-u_m(y)|^2\,|\det(D\Psi(y))|\,dy.$$

Di conseguenza, $u_n\circ\Phi$ è di Cauchy in $L^2(\Omega)$. Siccome $u_n\circ\Phi$ converge puntualmente a $u\circ\Phi$, abbiamo che

$$u_n\circ\Phi\to u\circ\Phi\quad\text{fortemente in}\quad L^2(\Omega).$$

Analogamente, usando la notazione

$$\|A\|_2^2=\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{ij}^2,$$

per una qualsiasi matrice

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1d}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{d1} & \dots & a_{dd}\end{pmatrix},$$

abbiamo che

$$|Av|\le\|A\|_2|v|\quad\text{per ogni}\quad v\in\mathbb{R}^d,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega|D\Phi(x)\nabla u_n(\Phi(x))-D\Phi(x)\nabla u(\Phi(x))|^2\,dx&\le\|D\Phi\|_2^2\int_\Omega|\nabla u_n(\Phi(x))-\nabla u(\Phi(x))|^2\,dx\\&=\|D\Phi\|_2^2\int_{\widetilde{\Omega}}|\nabla u_n(y)-\nabla u(y)|^2\,|\det(D\Psi(y))|\,dy,\end{aligned}$$

e quindi anche $D\Phi\nabla u_n(\Phi)$ converge fortemente a $D\Phi\nabla u(\Phi)$. Quindi $u\circ\Phi$ è Sobolev e $\nabla(u\circ\Phi)=D\Phi\nabla u(\Phi)$. □