Funzioni subarmoniche

Definizioni equivalenti per funzioni C^2

Teorema 1. *Siano Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in C^2(\Omega)$.*
Allora sono equivalenti:

(1) $\Delta u \geq 0$ *in senso delle distribuzioni, ovvero:*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \varphi \geq 0\,;$$

(2) *for every $x_0 \in \Omega$ la funzione*

$$M : \big(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\big) \to \mathbb{R}\ , \qquad M(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx$$

è crescente sull'intervallo $\big(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\big)$;

(3) $\Delta u \geq 0$ *in senso debole H^1, ovvero:*

$$-\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \varphi \geq 0\,;$$

(4) $\Delta u \geq 0$ *nel senso classico, ovvero:*

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^d \partial_{jj}u(x) \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in \Omega\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che il punto

(4) $\Delta u \geq 0$ nel senso classico, ovvero:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^d \partial_{jj}u(x) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega\,;$$

è equivalente a:

(4′) $\Delta u \geq 0$ nel senso classico, ovvero:

$$\int_\Omega \varphi(x)\Delta u(x)\,dx \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che} \quad \varphi \geq 0\,.$$

Ora, siccome per $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ abbiamo:

$$\int_\Omega \varphi(x)\Delta u(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx\,,$$

otteniamo subito che

$$(1) \ \Leftrightarrow\ (3) \ \Leftrightarrow\ (4').$$

Rimane quindi da dimostrare che

$$(4') \ \Leftrightarrow\ (2).$$

Dimostriamo prima che $(4') \;\Rightarrow\; (2)$. Siccome

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} u\right] &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1} u(x_0+rx)\,d\mathcal{H}^{d-1}(x)\right] \\
&= \left[\frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1} x\cdot\nabla u(x_0+rx)\,d\mathcal{H}^{d-1}(x)\right. \\
&= \left[\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} \nu\cdot\nabla u\right. \\
&= \left[\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{B_r(x_0)} \Delta u(x)\,dx,\right.
\end{aligned}$$

otteniamo che la funzione

$$m : \big(0, \mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)\big) \to \mathbb{R}\ , \qquad m(r) := \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} u$$

è crescente sull'intervallo $\big(0, \mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)\big)$. Siccome per $s \geq r$ abbiamo

$$\begin{aligned}
M(s)-M(r) &= \frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1} m(t)\,dt - \frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^r d\omega_d t^{d-1} m(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1} m(t)\,dt - \frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^s d\omega_d (\frac{r}{s}t)^{d-1} m(\frac{r}{s}t)\frac{r}{s}\,dt \\
&= \frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1}\Big(m(t) - m(\frac{r}{s}t)\Big)\,dt \geq 0,
\end{aligned}$$

otteniamo (2).

Dimostriamo ora che $(2) \;\Rightarrow\; (4')$. Osserviamo che (2) implica che per ogni $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \quad \text{per ogni} \quad r \in \big(0, \mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)\big).$$

Ora, siccome u è C^2 possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
u(x_0+x) &= u(x_0) + x\cdot\nabla u(x_0) + \frac{1}{2}x\cdot\nabla^2 u(x_0)x + |x|^2\varepsilon(x) \\
&= u(x_0) + \sum_{j=1}^d x_j\partial_j u(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d x_i x_j \partial_{ij}u(x_0) + |x|^2\varepsilon(x),
\end{aligned}$$

dove $\varepsilon(x)$ è una funzione tale che

$$\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx &= \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} u(x+x_0)\,dx \\
&= \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\Big(u(x_0) + x\cdot\nabla u(x_0) + \frac{1}{2}x\cdot\nabla^2 u(x_0)x + |x|^2\varepsilon(x)\Big)\,dx \\
&= u(x_0) + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} x\cdot\nabla u(x_0)\,dx + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\frac{1}{2}x\cdot\nabla^2 u(x_0)x\,dx + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|x|^2\varepsilon(x)\,dx \\
&= u(x_0) + \frac{1}{|B_r|}\frac{1}{2}\int_{B_r}\Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\partial_{ii}u(x_0)\Big)\,dx + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|x|^2\varepsilon(x)\,dx
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\int_{B_r} x_i\,dx = 0 \quad \text{per ogni} \quad i;$$

$$\int_{B_r} x_i x_j\,dx = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \neq j.$$

Ora, usando che

$$\int_{B_r} x_i^2\,dx = \frac{1}{d}\int_{B_r} |x|^2\,dx = \frac{1}{d} d\omega_d \int_0^r s^2 s^{d-1}\,ds = \frac{\omega_d}{d+2} r^{d+2},$$

otteniamo che

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx - u(x_0) = \frac{\Delta u(x_0)}{2(d+2)} r^2 + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |x|^2 \varepsilon(x)\,dx.$$

Infine, siccome

$$\left|\frac{1}{r^2|B_r|}\int_{B_r} |x|^2\varepsilon(x)\,dx\right| \leq \sup_{x\in B_r} |\varepsilon(x)| \to 0 \text{ (per } r \to 0),$$

otteniamo che necessariamente $\Delta u(x_0) \geq 0$. □

Definizioni equivalenti per funzioni in L^1_{loc}

Definizione 2 (Spazio e convergenza L^1_{loc})**.** *Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione Lebesgue misurabile $u : \Omega \to \mathbb{R}$, diciamo che $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^1(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$. Inoltre, data una successione $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ diciamo che*

$$u_n \to u \quad \textit{in} \quad L^1_{loc}(\Omega),$$

se $\|u_n - u\|_{L^1(K)} \to 0$ per ogni $K \subset \Omega$.

Teorema 3. *Siano Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione Lebesgue misurabile. Allora sono equivalenti:*

(1) $\Delta u \geq 0$ *in senso delle distribuzioni, ovvero:*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \varphi \geq 0.$$

(2) *for every $x_0 \in \Omega$ la funzione*

$$M : \big(0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)\big) \to \mathbb{R}\ , \qquad M(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx$$

è crescente sull'intervallo $\big(0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)\big)$.

Definizione 4 (Funzioni subarmoniche)**.** *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diciamo che u è subarmonica su Ω se valgono le proprieta (1) e (2) del Teorema 3.*

Dimostrazione del Teorema 3. Fissiamo una funzione $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che:

$$\psi \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_1\ ; \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx = 1\ ; \qquad \psi \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d;$$

$$\psi(x) = \psi(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo la funzione $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definita come $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\psi(x/\varepsilon)$. Osserviamo che:

$$\psi_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon\ ; \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(x)\,dx = 1\ ; \qquad \psi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d\ ;$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Supponiamo ora che vale (1). Consideriamo la convoluzione

$$u_\varepsilon(x) := u * \psi_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\psi_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Allora, per ogni palla $B_R(x_0)$ compattamente contenuta in Ω vale che $u_\varepsilon \in C^\infty(B_R)$ e

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{fortemente in} \quad L^1(B_R(x_0)).$$

Inoltre, per ogni funzione test

$$\varphi \in C_c^\infty(B_R(x_0)) \quad \text{tale che} \quad \varphi \geq 0 \quad \text{su} \quad B_R(x_0)$$

vale che

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} u_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x)\,dx &= \int_{B_r(x_0)} \int_\Omega u(y)\psi_\varepsilon(x-y)\,dy\,\Delta\varphi(x)\,dx \\
&= \int_\Omega u(y) \int_{B_R(x_0)} \psi_\varepsilon(x-y)\,\Delta\varphi(x)\,dx\,dy \\
&= \int_\Omega u(y) \int_{B_R(x_0)} \psi_\varepsilon(y-x)\,\Delta\varphi(x)\,dx\,dy \\
&= \int_\Omega u(y)(\psi_\varepsilon * \Delta\varphi)(y)\,dy \\
&= \int_\Omega u(y)\Delta(\psi_\varepsilon * \varphi)(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\psi_\varepsilon * \varphi(y) = \int \psi_\varepsilon(y-x)\varphi(x)\,dx \geq 0,$$

otteniamo che

$$\int_{B_R(x_0)} u_\varepsilon(x)\Delta\varphi(x)\,dx \geq 0.$$

Quindi, $\Delta u_\varepsilon \geq 0$ in $B_R(x_0)$ e di conseguenza, per ogni coppia di raggi $s \geq r$ nell'intervallo $(0,R)$, abbiamo

$$\frac{1}{|B_s|}\int_{B_s(x_0)} u_\varepsilon(x)\,dx \geq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_\varepsilon(x)\,dx.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ abbiamo

$$\frac{1}{|B_s|}\int_{B_s(x_0)} u(x)\,dx \geq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx,$$

il che dimostra (2).

Supponiamo che vale (2). Siano $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ una funzione nonnegativa e $K \subset \Omega$ il suo supporto. Poniamo

$$\delta := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega),$$

e definiamo l'aperto

$$\Omega_{\delta/2} := \Big\{x \in \Omega \ : \ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \delta/2\Big\}.$$

Allora, la convoluzione

$$\Big(u * \Big(\frac{1}{|B_r|}\mathbb{1}_{B_r}\Big)\Big)(x) = \int_\Omega u(y-x)\frac{1}{|B_r|}\mathbb{1}_{B_r}(x)\,dx$$

è ben definita quando $x \in \Omega_{\delta/2}$ e $r \in (0,\delta/2)$. Inoltre, vale

$$\int_\Omega u(y-x)\frac{1}{|B_r|}\mathbb{1}_{B_r}(x)\,dx = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy$$

e quindi, per ogni $r \in (0, \delta/2)$,

$$\left(u * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbb{1}_{B_r}\right)\right) \geq u \quad \text{su} \quad \Omega_{\delta/2}.$$

Ora, prendendo la convoluzione con ψ_ε per un qualche $\varepsilon \in (0, \delta/4)$ otteniamo che

$$(\psi_\varepsilon * u) * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbb{1}_{B_r}\right) = \psi_\varepsilon * \left(u * \left(\frac{1}{|B_r|} \mathbb{1}_{B_r}\right)\right) \geq \psi_\varepsilon * u \quad \text{su} \quad \Omega_{\delta/4}.$$

Di conseguenza, $\psi_\varepsilon * u$ ha la proprietà (2) su $\Omega_{\delta/4}$ (per ogni raggio $r < \delta/2$). Siccome $\psi_\varepsilon * u \in C^\infty$, otteniamo che

$$0 \leq \int_{\Omega_{\delta/4}} \Delta(\psi_\varepsilon * u)\varphi = \int_{\Omega_{\delta/4}} (\psi_\varepsilon * u)\Delta\varphi\,.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\int_{\Omega_{\delta/4}} u\Delta\varphi \geq 0,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Come corollario otteniamo il seguente teorema.

Corollario 5 (Definizioni equivalenti per funzioni in H^1_{loc})**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Data una funzione $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, sono equivalenti:*

(1) $\Delta u \geq 0$ *in senso delle distribuzioni, ovvero:*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \varphi \geq 0\,;$$

(2) *for every $x_0 \in \Omega$ la funzione*

$$M : \big(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\big) \to \mathbb{R}\ , \qquad M(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx$$

è decrescente sull'intervallo $\big(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\big)$;

(3) $\Delta u \geq 0$ *in senso debole H^1, ovvero:*

$$-\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \varphi \geq 0\,.$$

Esempi di funzioni subarmoniche

Esempio 6. *Sia $\nu \in \mathbb{R}^d$ un vettore non nullo. Allora, la funzione $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $u(x) = (x \cdot \nu)_+$, è subarmonica.*

Più in generale vale la seguente proposizione.

Proposizione 7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Siano $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ due funzioni subarmoniche. Allora, la funzione $u \vee v : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione subarmonica.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proprietà della media. $\square$

Esempio 8. *Ogni funzione convessa su $\mathbb{R}^d$ è subarmonica.*

Esempio 9. *In dimensione $d = 2$, dato un raggio $R > 0$, consideriamo la funzione*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \qquad \varphi(x) := \begin{cases} \ln|x| & se \quad |x| > R; \\ \ln R & se \quad |x| \leq R. \end{cases}$$

Allora, la funzione φ è subarmonica su $\mathbb{R}^2$.

Esempio 10. *In dimensione $d \geq 3$, dato un raggio $R > 0$, consideriamo la funzione*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \qquad \varphi(x) := \begin{cases} |x|^{2-d} & se \quad |x| > R; \\ \ln R^{2-d} & se \quad |x| \leq R. \end{cases}$$

Allora, la funzione φ è subarmonica su $\mathbb{R}^2$.

Proposizione 11. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se esiste una successione di funzioni $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ subarmoniche su Ω tale che*

$$u_n \to u \quad in \quad L^1_{loc}(\Omega),$$

allora u è subarmonica.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla formulazione in senso distribuzionale. Infatti, per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, abbiamo:

$$\int_\Omega u_n \Delta\varphi \to \int_\Omega u\Delta\varphi \,.$$

□

Corollario 12. *La seguente funzione è subarmonica su $\mathbb{R}^2$.*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \qquad \varphi(x) := \ln|x|.$$

Corollario 13. *La seguente funzione è subarmonica su $\mathbb{R}^d$, per $d \geq 3$.*

$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \ , \qquad \varphi(x) := |x|^{2-d}.$$

Definizione puntuale e semicontinuità delle funzioni subarmoniche

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica su Ω. Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$, la funzione

$$M : (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)) \to \mathbb{R} \ , \qquad M(r) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx \,,$$

è monotona crescente. Di conseguenza, esiste il limite

$$L_u(x_0) := \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx.$$

La funzione

$$L_u : \Omega \to \mathbb{R}$$

è definita in ogni punto di Ω ed è Lebesgue misurabile. Inoltre, L_u è un rappresentante della classe di equivalenza di u. D'ora in poi, identificheremo ogni funzione subarmonica u con il suo rappresentante L_u. In questo modo possiamo scrivere:

$$u(x_0) := \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx.$$

Proposizione 14. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme aperto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *una funzione subarmonica su* Ω. *Allora, la funzione* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *è semicontinua superiormente, ovvero per ogni successione*

$$\Omega \ni x_n \to x_0 \in \Omega\,,$$

si ha che

$$u(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} u(x_n).$$

Dimostrazione. Sia r un raggio tale per cui $r < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Allora

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_n)} u(x)\,dx \geq \limsup_{n\to\infty} u(x_n).$$

Passando al limite per $r \to 0$, otteniamo

$$u(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} u(x_n).$$

□

Proposizione 15. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme aperto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Se esiste una successione di funzioni* $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ *subarmoniche su* Ω *tale che*

$$u_n \to u \quad in \quad L^1_{loc}(\Omega),$$

allora, per ogni $x \in \Omega$

$$u(x) \geq \limsup_{n\to+\infty} u(x_n).$$

Se, inoltre, u_n *è una successione decrescente, allora*

$$u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) \qquad per\ ogni \qquad x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Come nella proposizione precedente, sia r un raggio tale per cui $r < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Allora

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx \geq \limsup_{n\to\infty} u_n(x_0).$$

Passando al limite per $r \to 0$, otteniamo

$$u(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} u_n(x_0).$$

Per dimostrare la seconda affermazione prendiamo $x_0 \in \Omega$ e poniamo

$$\ell(x_0) := \lim_{n\to+\infty} u_n(x_0).$$

Per quanto già dimostrato sopra, abbiamo che

$$u(x_0) \geq \ell(x_0).$$

Consideriamo prima il caso $\ell(x_0) > -\infty$**.** Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $n \geq 1$ e $r > 0$ tali che

$$|\ell(x_0) - u_n(x_0)| \leq \varepsilon/2 \qquad \text{e} \qquad \left| u_n(x_0) - \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx \right| \leq \varepsilon/2\,.$$

Quindi

$$0 \leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx - \ell(x_0) \leq \varepsilon.$$

Ora, siccome u_n è decrescente, abbiamo che

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx.$$

Quindi

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le \ell(x_0)+\varepsilon.$$

e di conseguenza

$$u(x_0)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le \ell(x_0)+\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, otteniamo:

$$u(x_0)\le \ell(x_0).$$

Consideriamo ora il caso $\ell(x_0)=-\infty$. Allora, per ogni $C>0$, esistono $n>0$ ed $r>0$ tali che

$$u_n(x_0)\le -2C \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx \le -C.$$

A questo punto, possiamo concludere come nel caso precedente. Siccome u_n è decrescente, abbiamo:

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u_n(x)\,dx.$$

Quindi

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le -C.$$

e di conseguenza

$$u(x_0)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \le -C.$$

Siccome C è arbitrario, otteniamo che anche $u(x_0)=-\infty$. □

Definizione 16. *Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica su Ω. Allora, l'insieme dei punti $x_0\in\Omega$ tali che*

$$u(x_0)=-\infty$$

si chiama insieme polare di u.

In ogni dimensione $d\ge 2$ esistono funzioni subarmoniche con insieme polare non vuoto.

Proposizione 17. *Sia $d=2$. Esiste una funzione $u\in H^1_0(B_1)$ tale che:*

- *u è subarmonica in B_1;*
- *$u(0)=-\infty$.*

Dimostrazione. Per ogni $R\in(0,1)$ definiamo la funzione

$$\varphi_R: B_1\to\mathbb{R}\ , \qquad \varphi_R(x):=\begin{cases} -\frac{\ln|x|}{\ln R} & \text{se} \quad |x|>R;\\ -1 \quad \text{se} & |x|\le R.\end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\varphi_R=0 \quad \text{su} \quad \partial B_1\ , \qquad \varphi_R=-1 \quad \text{in} \quad \overline{B}_R\ , \qquad -1\le\varphi_R\le 0 \quad \text{in} \quad B_1\setminus B_R\,.$$

Inoltre,

$$|\nabla\varphi_R|(x)=\frac{1}{|\ln R|}\frac{1}{|x|} \quad \text{in} \quad B_1\setminus B_R\,,$$

ed in particolare

$$\int_{B_1} |\nabla \varphi_R|^2 \, dx = \int_{B_1 \setminus B_R} \frac{1}{|x|^2 (\ln R)^2} \, dx = 2\pi \int_R^1 \frac{r\, dr}{r^2 (\ln R)^2} = \frac{2\pi}{|\ln R\,|}.$$

Consideriamo ora la serie

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_k \varphi_{R_k}(x).$$

Scegliendo

$$R_k = e^{-k^4},$$
$$c_k = 1$$

abbiamo che

$$\int_{B_1} |c_k \nabla \varphi_{R_k}|^2 \, dx = \frac{2\pi c_k^2}{|\ln R_k\,|} = \frac{2\pi}{k^4},$$

In particolare, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|c_k \phi_{R_k}\|_{H^1(B_1)}$$

e convergente. Quindi la successione di funzioni

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_{R_k}$$

converge fortemente in H^1, è decrescente e $u_n(0) = n$. Quindi il suo limite

$$u = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

è una funzione in $H^1_0(B_1)$, subarmonica in B_1 e tale che $u(0) = -\infty$. □

Esistono inoltre funzioni subarmoniche limitate, ma discontinue.

Proposizione 18. *Sia $d = 2$. Per ogni successione decrescente di numeri reali positivi $a_n \to 0$, esiste una funzione $u \in H^1(B_{1/2})$ tale che:*

- *u è subarmonica in $B_{1/2}$;*
- *$u(0,0) \geq -1/2$;*
- *$u(a_n, 0) \leq -1$ per ogni $n \geq 1$.*

Dimostrazione. Sia $X_n := (a_n, 0)$. Come nella dimostrazione precedente, definiamo:

$$\varphi_R : B_1 \to \mathbb{R}\ , \qquad \varphi_R(x) := \begin{cases} -\frac{\ln|x|}{\ln R} & \text{se} \quad |x| > R; \\ -1 & \text{se} \quad |x| \leq R. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione

$$\psi_n := \varphi_{R_n}(x - X_n),$$

dove scegliamo il raggio R_n abbastanza piccolo per avere:

$$-\frac{1}{4^n} \leq \psi_n(0,0).$$

Inoltre, possiamo scegliere la successione dei taggi R_n in modo tale che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\psi_k\|_{H^1(B_1)} < +\infty.$$

Quindi esiste il limite $u \in H^1(B_1)$ della serie

$$u := \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j \,.$$

Quindi,

$$u(0,0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_k(0,0) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} (-\frac{1}{4^n}) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

D'altra parte, per ogni k,

$$u(x_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j(x_k) \leq \psi_k(x_k) \leq -1. \qquad \square$$

Funzioni subarmoniche e funzioni olomorfe

Proposizione 19. *Sia Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Allora, per ogni funzione olomorfa $h : \Omega \to \mathbb{C}$, la funzione $f = \ln|h|$ è subarmonica su Ω.*

Dimostrazione. Osserviamo che se z_0 è uno zero di h, allora possiamo scrivere

$$h(z) = (z - z_0)^n h_1(z),$$

dove $h(z_0) \neq 0$. Quindi

$$\ln|h(z)| = \ln\Big|(z - z_0)^n h_1(z)\Big| = n \ln|z - z_0| + \ln|h_1(z)|.$$

Siccome $\ln|z - z_0|$ è subarmonica, è sufficiente dimostrare che $\ln|h_1(z)|$ è subarmonica. Possiamo supporre quindi che $h(z) \neq 0$. Scrivendo h come

$$h(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

abbiamo che

$$\partial_x u = \partial_y v \qquad \text{e} \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

In particolare,

$$\partial_x\Big(\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)\Big) = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}$$
$$\partial_y\Big(\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)\Big) = \frac{uu_y + vv_y}{u^2 + v^2}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\Big(\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)\Big) = \partial_x\left[\frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}\right] &= \frac{uu_{xx} + vv_{xx} + u_x^2 + v_x^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_x + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}\\ &= \frac{uu_{xx} + vv_{xx} + u_x^2 + u_y^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_x - vu_y)^2}{(u^2 + v^2)^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_{yy}\Big(\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)\Big) = \partial_y\left[\frac{uu_y + vv_y}{u^2 + v^2}\right] &= \frac{uu_{yy} + vv_{yy} + u_y^2 + v_y^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_y + vv_y)^2}{(u^2 + v^2)^2}\\ &= \frac{uu_{yy} + vv_{yy} + u_y^2 + u_x^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_y + vu_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}\end{aligned}$$

Di conseguenza, siccome $\Delta u = \Delta v \equiv 0$ in Ω, abbiamo:

$$\begin{aligned}\Delta\Big(\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)\Big) &= \frac{u_x^2 + u_y^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_x - vu_y)^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{u_y^2 + u_x^2}{u^2 + v^2} - \frac{2(uu_y + vu_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}\\ &= \frac{2}{(u^2 + v^2)^2}\Big((u_x^2 + u_y^2)(u^2 + v^2) - (uu_x - vu_y)^2 - (uu_y + vu_x)^2\Big) = 0.\end{aligned}$$

Quindi $\ln|h|$ è armonica dove $\{|h| \neq 0\}$ il che conclude la dimostrazione. $\square$