

Un'applicazione del teorema di regolarità fino al bordo

GLI SPAZI H_0^1 - DEFINIZIONE

Dato un qualsiasi aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, definiamo lo spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$ come la chiusura delle funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $H^1(\mathbb{R}^d)$ data da

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx \right)^{1/2}$$

In particolare, $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ e per ogni funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha che

$$u = 0 \quad \text{Lebesgue quasi-ovunque in } \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

UNA CARATTERIZZAZIONE DEGLI SPAZI $H_0^1(\Omega)$

Dimostreremo il seguente teorema.

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^d che soddisfa la stima di densità esterna, ovvero tale che*

$$\begin{aligned} & \text{Esistono due costanti } r_0 > 0 \text{ e } c \in (0, 1) \text{ tali che} \\ & \text{per ogni } x \in \partial\Omega \text{ e per ogni } r \in (0, r_0) \text{ si ha la stima} \\ & |B_r(x) \cap \Omega| \leq (1 - c)|B_r|. \end{aligned}$$

Allora

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) : u = 0 \text{ Lebesgue quasi-ovunque su } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\}.$$

Osservazione 2. *Osserviamo che basta dimostrare il teorema per domini limitati. Infatti, supponiamo che Ω sia un aperto illimitato ed u una funzione tale che*

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Consideriamo una funzione $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \varphi \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_2; \quad \varphi \equiv 1 \text{ su } B_1; \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ su } B_2 \setminus B_1.$$

Per ogni $R > 0$, definiamo la funzione $\varphi_R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\varphi_R(x) := \varphi(x/R) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

È immediato verificare che, per $R \rightarrow +\infty$,

$$\varphi_R u \rightarrow u \quad \text{fortemente in } H^1(\mathbb{R}^d).$$

Ora, siccome

$$\varphi_R u = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^d \setminus (\Omega \cap B_R),$$

e siccome $\Omega \cap B_R$ ha ancora la stima di densità esterna, abbiamo che

$$\varphi_R u \in H_0^1(\Omega \cap B_R),$$

e quindi $\varphi_R u \in H_0^1(\Omega)$. Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, otteniamo che $u \in H_0^1(\Omega)$.

GLI SPAZI $\tilde{H}_0^1(\Omega)$

Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiamo

$$\tilde{H}_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) : u = 0 \text{ Lebesgue quasi-ovunque su } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\}.$$

Osserviamo che $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ sia uno sottospazio lineare chiuso di $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Inoltre, valgono le seguenti proposizioni:

Proposizione 3. Date due funzioni $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$, sono equivalenti:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi f \, dx \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in \tilde{H}_0^1(\Omega);$$

e

$$(2) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} u f \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} v f \, dx \quad \text{per ogni} \quad v \in \tilde{H}_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 4. Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d ed $f \in L^2(\Omega)$. Allora, esiste un'unica funzione $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ tale per cui valgono (1) e (2). Diremo che u è soluzione debole del problema $-\Delta u = f$ nello spazio $\tilde{H}_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato che soddisfa la stima di densità esterna. Sia $f \in L^p(\Omega)$, per un qualche $p \geq d/2$. Sia $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ la soluzione debole del problema $-\Delta u = f$ in $\tilde{H}_0^1(\Omega)$. Allora,

- (i) $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ per un qualche $\alpha > 0$;
- (ii) $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$;
- (iii) $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. I primi due punti sono il teorema di regolarità che dimostreremo in seguito. Il punto (iii) segue da (i) e (ii) ed il lemma seguente. □

Lemma 6. Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^d ed u una funzione tale che

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Allora $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Siccome la parte positiva e quella negativa di u hanno la stesse proprietà:

$$u_{\pm} \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u_{\pm} \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega,$$

basta dimostrare il teorema nel caso $u \geq 0$. Dato un $t > 0$, consideriamo la funzione

$$u_t := (u - t)_+.$$

Allora,

$$u_t \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad u_t \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus K_t,$$

dove K_t è l'insieme compatto

$$K_t := \{u \geq t\}.$$

Osserviamo inoltre, che K_t è incluso in Ω . Di conseguenza, la distanza

$$\delta := \text{dist}(K_t; \mathbb{R}^d \setminus \Omega) = \min \{|x - y| : x \in K_t, y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_t\},$$

è strettamente positiva. Consideriamo ora una funzione

$$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \phi \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_1; \quad \phi \geq 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \, dx = 1,$$

e definiamo

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} \phi(x/\varepsilon).$$

Allora,

$$\phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \phi_\varepsilon \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon; \quad \phi_\varepsilon \geq 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x) \, dx = 1.$$

Inoltre,

- $u_t * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- per $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_t * \phi_\varepsilon$ converge a u_t fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Ora, osserviamo che per $\varepsilon < \delta$ il supporto di $u_t * \phi_\varepsilon$ è contenuto in Ω , ovvero $u_t * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Si ha quindi che per definizione $u_t \in H_0^1(\Omega)$. Infine, per concludere basta osservare che per $t \rightarrow 0$, la funzione u_t converge a u fortemente in $H^1(\mathbb{R}^d)$. □

DIMOSTRAZIONE DI TEOREMA 1

Sia $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$. Dimostreremo che $u \in H_0^1(\Omega)$. Siccome $u_{\pm} \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$, basta considerare il caso

$$u \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d.$$

Step 1. Supponiamo che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e poniamo $M := \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Per ogni $n \geq 1$, consideriamo il funzionale

$$J_n : \tilde{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J_n(v) := \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + n \int_{\Omega} |u - v|^2 dx.$$

Osserviamo che (per ogni fissato $n \geq 1$) esiste un'unica funzione $u_n \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ tale che

$$J_n(u_n) \leq J_n(v) \quad \text{per ogni} \quad v \in \tilde{H}_0^1(\Omega).$$

Siccome

$$J(u_n \vee 0) \leq J(u_n) \quad \text{e} \quad J(u_n \wedge M) \leq J(u_n),$$

abbiamo che necessariamente

$$0 \leq u_n \leq M \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d.$$

Step 2. Siccome, per ogni $\varphi \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ si ha che il minimo della funzione

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto J_n(u_n + t\varphi),$$

è raggiunto in $t = 0$, abbiamo che

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx = n \int_{\Omega} \varphi(u - u_n) dx,$$

ovvero u_n è soluzione debole in $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ del problema

$$-\Delta u_n = n(u - u_n).$$

Siccome $n(u - u_n)$ è una funzione limitata, possiamo applicare Proposizione 5 ottenendo che

$$u_n \in H_0^1(\Omega).$$

Step 3. Osserviamo che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$J_n(u_n) \leq J_n(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + n \int_{\Omega} |u - u_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

In particolare,

$$(3) \quad \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |u_n - u|^2 dx \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

La seconda disuguaglianza implica che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{forte in} \quad L^2(\Omega).$$

Ora, questa informazione, insieme alla prima disuguaglianza implica che le norme H^1 di u_n sono limitate e quindi

$$u_n \rightarrow u \quad \text{debole in} \quad H^1(\mathbb{R}^d).$$

Per la semicontinuità delle norme H^1 , abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Usando di nuovo la prima disuguaglianza di (3), otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Di conseguenza, $u_n \rightarrow u$ forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$. In particolare, siccome $u_n \in H_0^1(\Omega)$, questo implica che

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

Step 4. Sia ora u una qualsiasi funzione non-negativa in $\tilde{H}_0^1(\Omega)$. Per ogni $M > 0$ consideriamo la funzione $u \wedge M$. È immediato verificare che $u \wedge M \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$. Di conseguenza, per quello che abbiamo appena dimostrato, $u \wedge M \in H_0^1(\Omega)$. D'altra parte, per $M \rightarrow +\infty$, $u \wedge M$ converge forte in $H^1(\mathbb{R}^d)$ a u . Quindi anche $u \in H_0^1(\Omega)$.