Soprasoluzioni, sottosoluzioni e teorema della media

Soprasoluzioni e sottosoluzioni in senso debole H^1

Definizione 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1(\Omega)$, ed $f \in L^2(\Omega)$.*

- *Diciamo che u è una soluzione debole di*
$$\Delta u + f = 0 \quad in \quad \Omega\,,$$
se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ si ha
$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx + \int_\Omega f\varphi\,dx = 0\,;$$
- *Diciamo che u è una sottosoluzione:*
$$\Delta u + f \ge 0 \quad in \quad \Omega\,,$$
se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\varphi \ge 0$ su Ω, si ha
$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx + \int_\Omega f\varphi\,dx \ge 0\,;$$
- *Diciamo che u è una soprasoluzione:*
$$\Delta u + f \le 0 \quad in \quad \Omega\,,$$
se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\varphi \ge 0$ su Ω, si ha
$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx + \int_\Omega f\varphi\,dx \le 0\,.$$

Inoltre, è equivalente prendere le funzioni test φ in $H^1_0(\Omega)$, in $C^1_c(\Omega)$ ed in $C^\infty_c(\Omega)$.

Questa definizione può anche essere generalizzata al caso $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, $f \in L^2_{loc}(\Omega)$, utile per esempio quando si considerano funzioni definite su domini illimitati. In questo caso, le funzioni test si prendono in $C^1_c(\Omega)$ oppure $C^\infty_c(\Omega)$ per assicurare la buona definizione dei termini
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega f\varphi\,dx.$$
Ecco la definizione completa.

Definizione 2. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, $f \in L^2_{loc}(\Omega)$.*

- *Diciamo che u è una soluzione debole di*
$$\Delta u + f = 0 \quad in \quad \Omega\,,$$
se per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ si ha
$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx + \int_\Omega f\varphi\,dx = 0\,;$$
- *Diciamo che u è una sottosoluzione:*
$$\Delta u + f \ge 0 \quad in \quad \Omega\,,$$
se per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, $\varphi \ge 0$ su Ω, si ha
$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx + \int_\Omega f\varphi\,dx \ge 0\,;$$
- *Diciamo che u è una soprasoluzione:*
$$\Delta u + f \le 0 \quad in \quad \Omega\,,$$
se per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, $\varphi \ge 0$ su Ω, si ha
$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx + \int_\Omega f\varphi\,dx \le 0\,.$$

Esempio 3. *Le funzioni* $u(x, y) = x^2 - y^2$ *e* $u(x, y) = xy$ *sono soluzioni di* $\Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$.
La funzione $w(X) = -\frac{1}{2d}|X|^2$ *è soluzione di* $-\Delta w = 1$ *in* $\mathbb{R}^d$.
La funzione $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ *è soluzione di* $\Delta g = 0$ *in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
La funzione $g(X) = |X|^{2-d}$ *è soluzione di* $\Delta g = 0$ *in* $\mathbb{R}^d \setminus \{(0)\}$ *quando* $d \geq 3$.

Osservazione 4. *Se* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *è allo stesso tempo sopra e sottosoluzione in* Ω, *allora* u *è soluzione in* Ω.

Approssimazione di sottosoluzioni (soprasoluzioni) con sottosoluzioni (soprasoluzioni) regolari

Mollificatore. Fissiamo una funzione $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\phi \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d\,, \qquad \phi \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_1\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\,dx = 1,$$

e tale che

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\phi(x/\varepsilon),$$

ed osserviamo che:

$$\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\,, \qquad \phi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d\,, \qquad \phi_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x)\,dx = 1\,,$$

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Convoluzione. Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed un $\delta > 0$, definiamo

$$\Omega_\delta := \Big\{x \in \Omega \ : \ B_\delta(x) \subset \Omega\Big\} = \Big\{x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\Big\}.$$

Date

una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e due costanti $0 < \varepsilon < \delta$,

definiamo la convoluzione

$$u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R},$$

come

$$u * \phi_\varepsilon(x) := \int_\Omega \phi_\varepsilon(x - y)u(y)\,dy.$$

Proprietà della convoluzione. È noto che, fissati $\delta \geq \varepsilon > 0$,

- La funzione $u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ è continua (per il teorema della convergenza dominata).
- La funzione $u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ è differenziabile su Ω_δ e
$$\partial_j\big(u * \phi_\varepsilon\big) = u * \partial_j\phi_\varepsilon.$$
- La funzione $u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ è C^∞ su Ω_δ.
- Se $u \in H^1(\Omega)$, allora $u * \phi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\delta)$ e
$$\partial_j(u * \phi_\varepsilon) = (\partial_j u) * \phi_\varepsilon.$$
Inoltre,
$u * \phi_\varepsilon$ converge da u fortemente in $H^1(\Omega_\delta)$, per $\varepsilon \to 0$.

Proposizione 5 (Approssimazione di soprasoluzioni e sottosoluzioni)**.** *Sia* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^d$.
Siano $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, $f \in L^2_{loc}(\Omega)$. *Allora, fissate due costanti* $0 < \varepsilon < \delta$, *abbiamo:*

(1) *se* $\Delta u + f = 0$ *in* Ω, *allora* $\Delta(u * \phi_\varepsilon) + f * \phi_\varepsilon = 0$ *in* Ω_δ *;*

(2) *se* $\Delta u + f \geq 0$ *in* Ω, *allora* $\Delta(u * \phi_\varepsilon) + f * \phi_\varepsilon \geq 0$ *in* Ω_δ *;*

(3) *se* $\Delta u + \mathrm{div}F + f \leq 0$ *in* Ω, *allora* $\Delta(u * \phi_\varepsilon) + f * \phi_\varepsilon \leq 0$ *in* Ω_δ *.*

Dimostrazione. Dimostriamo (2). Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\delta)$ una funzione non-negativa. Allora,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta} \nabla(u*\phi_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi\,dx &= \int_{\Omega_\delta} \Big((\nabla u)*\phi_\varepsilon\Big)\cdot\nabla\varphi\,dx \\
&= \int\int \nabla u(y)\phi_\varepsilon(x-y)\cdot\nabla\varphi(x)\,dy\,dx \\
&= \int\int \nabla u(y)\phi_\varepsilon(y-x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dy\,dx = \int_\Omega \nabla u(y)\cdot\nabla(\varphi*\phi_\varepsilon)(y)\,dy\,; \\
\int_{\Omega_\delta}(f*\phi_\varepsilon)\varphi\,dx &= \int\int f(y)\phi_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,dy\,dx \\
&= \int\int f(y)\phi_\varepsilon(y-x)\varphi(y)\,dy\,dx = \int_\Omega f(y)(\varphi*\phi_\varepsilon)(y)\,dy\,;
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\varphi*\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Ora, siccome φ e ϕ_ε sono entrambe nonnegative, anche $\varphi*\phi_\varepsilon$ è nonnegativa. Quindi, per ipotesi

$$-\int_\Omega \nabla u(y)\cdot\nabla(\varphi*\phi_\varepsilon)(y)\,dy + \int_\Omega f(y)(\varphi*\phi_\varepsilon)(y)\,dy \geq 0,$$

e di conseguenza, $\Delta(u*\phi_\varepsilon)+f*\phi_\varepsilon \geq 0$ in Ω_δ. □

Teorema della media
e definizione puntuale delle sottosoluzioni (e delle soprasoluzioni)

Lemma 6 (Derivata della media per funzioni regolari)**.** *Sia φ una funzione di classe C^2 su B_R. Allora, per ogni $0<r<R$ si ha*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r}\varphi\right] = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{B_r}\Delta\varphi(x)\,dx$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r}\varphi\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1}\varphi(r\theta)\,d\theta\right] &= \frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1}\theta\cdot\nabla\varphi(r\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{\partial B_r}\frac{x}{|x|}\cdot\nabla\varphi(x)\,d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&= \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}}\int_{B_r}\Delta\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 7. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Siano $u \in H^1(\Omega)$ ed $f \in L^p(\Omega)$, per un qualche $p > d/2$. Esiste una costante $C = C(d,p)$ tale che:*

(1) *se u è una sottosoluzione:*

$$\Delta u + f \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

se $B_R(x_0) \Subset \Omega$ e se $r,s \in (0,R]$ sono tali che $r \leq s$, allora si ha

$$\begin{aligned}
\fint_{\partial B_s(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u &\geq -C(d,p)\,s^{2-\frac{d}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\,, \\
\fint_{B_s(x_0)} u - \fint_{B_r(x_0)} u &\geq -C(d,p)\,s^{2-\frac{d}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

ed esiste $\ell(x_0) \in [-\infty,+\infty)$ tale che

$$\lim_{r\to0^+}\fint_{\partial B_r(x_0)} u = \lim_{r\to0^+}\fint_{B_r(x_0)} u = \ell(x_0).$$

(2) *se u è una soprasoluzione:*

$$\Delta u + f \le 0 \quad in \quad \Omega,$$

se $B_R(x_0) \Subset \Omega$ e se $r,s \in (0,R]$ sono tali che $r \le s$, allora si ha

$$\fint_{\partial B_s(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u \le C(d,p)\, s^{2-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

$$\fint_{B_s(x_0)} u - \fint_{B_r(x_0)} u \le C(d,p)\, s^{2-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

ed esiste $\ell(x_0) \in (-\infty, +\infty]$ tale che

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{\partial B_r(x_0)} u = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B_r(x_0)} u = \ell(x_0).$$

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Consideriamo la funzione $u * \phi_\varepsilon$. Siccome $\overline{B}_R(x_0) \subset \Omega$, la funzione $u * \phi_\varepsilon$ è definita su $B_R(x_0)$ per ε abbastanza piccolo e

$$u * \phi_\varepsilon \to u \quad \text{fortemente in} \quad H^1(B_R(x_0)).$$

Applicando Lemma 6 alla funzione $u * \phi_\varepsilon$, otteniamo che per ogni $r \in (0,R]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r(x_0)} (u*\phi_\varepsilon)\right] &= \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r(x_0)} \Delta(u*\phi_\varepsilon)(x)\,dx \\ &\ge -\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r(x_0)} (f*\phi_\varepsilon)(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Siccome $f \in L^p(\Omega)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r(x_0)} (f*\phi_\varepsilon)(x)\,dx\right| &\le \frac{|B_r|^{\frac{p-1}{p}}}{d\omega_d r^{d-1}} \|f*\phi_\varepsilon\|_{L^p(B_r(x_0))} \\ &= \frac{r^{1-\frac{d}{p}}}{d\omega_d^{1/p}} \|f*\phi_\varepsilon\|_{L^p(B_r(x_0))} \\ &\le \frac{r^{1-\frac{d}{p}}}{d\omega_d^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Integrando tra r ed s, otteniamo

$$\begin{aligned}\fint_{\partial B_s(x_0)} (u*\phi_\varepsilon) - \fint_{\partial B_r(x_0)} (u*\phi_\varepsilon) &\ge \int_r^s \Big(-\frac{t^{1-\frac{d}{p}}}{d\omega_d^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}\Big)\,dt \\ &\ge -\frac{s^{2-\frac{d}{p}}}{(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0$,

$$\fint_{\partial B_s(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u \ge -\frac{s^{2-\frac{d}{p}}}{(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

In particolare, esiste il limite

$$\ell(x_0) := \lim_{r\to 0^+} \fint_{\partial B_r(x_0)} u,$$

e si ha che

$$\fint_{\partial B_r(x_0)} u - \ell(x_0) \ge -\frac{r^{2-\frac{d}{p}}}{(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Infine, per stimare la differenza

$$\fint_{B_s(x_0)} u - \fint_{B_r(x_0)} u,$$

poniamo

$$m(r) := \fint_{\partial B_r(x_0)} u\,,$$

ed osserviamo che

$$\begin{aligned}
\fint_{B_s(x_0)} u - \fint_{B_r(x_0)} u &= \frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1} m(t)\,dt - \frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^r d\omega_d t^{d-1} m(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1} m(t)\,dt - \frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^s d\omega_d \Big(\frac{r}{s}t\Big)^{d-1} m\Big(\frac{r}{s}t\Big)\,\frac{r}{s}dt \\
&= \frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1}\Big(m(t) - m\Big(\frac{r}{s}t\Big)\Big)\,dt \\
&\geq -\frac{1}{\omega_d s^d}\int_0^s d\omega_d t^{d-1}\bigg(-\frac{t^{2-\frac{d}{p}}}{(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\bigg)\bigg)\,dt \\
&= -\frac{d\,s^{2-\frac{d}{p}}}{(d+2-\frac{d}{p})(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} \\
&\geq -\frac{s^{2-\frac{d}{p}}}{(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\Big|\fint_{B_r(x_0)} u - \ell(x_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^r d\omega_d s^{d-1} m(s)\,ds - \ell(x_0)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^r d\omega_d s^{d-1} m(s)\,ds - \frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^r d\omega_d s^{d-1}\ell(x_0)\,ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\omega_d r^d}\int_0^r d\omega_d s^{d-1}|m(s)-\ell(x_0)|\,ds.
\end{aligned}$$

Siccome $|m(s)-\ell(x_0)| \to s$ per $s \to 0$, otteniamo che

$$\lim_{r\to 0^+}\fint_{B_r(x_0)} u = \ell(x_0),$$

e che per ogni $r > 0$

$$\fint_{B_r(x_0)} u - \ell(x_0) \geq -\frac{r^{2-\frac{d}{p}}}{(2-\frac{d}{p})d\omega_d^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

□