

Una stima L^∞ per le autofunzioni del Laplaciano con condizioni di Dirichlet

Teorema 1. Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione di

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} u^2 dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Limitatezza delle autofunzioni. Siano $p > d/2$ e Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Sia

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \rightarrow \Omega$$

l'operatore risolvante del laplaciano. Allora,

$$\|R_\Omega(f)\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad \text{per ogni } f \in L^p(\Omega).$$

e quindi R_Ω può essere esteso ad un operatore lineare continuo

$$R_\Omega : L^p(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

con norma che dipende solo dalla dimensione d e la misura $|\Omega|$.

- Se $d \leq 3$, allora prendendo $p = 2$, abbiamo che $d/2 < p = 2$ e quindi

$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

è un operatore limitato per $d = 1, 2, 3$. Siccome u è soluzione di

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega$$

e $u \in L^2$, abbiamo che $u \in L^\infty$.

- Supponiamo ora che $d \geq 4$. Per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev abbiamo che

$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$$

è un operatore limitato dove $2^* = \frac{2d}{d-2}$.

- Se la dimensione d è 4 oppure 5, allora per

$$2^* = \frac{2d}{d-2} \geq \frac{d}{2}$$

e quindi la composizione

$$R_\Omega^2 := R_\Omega \circ R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

può essere estesa ad un operatore continuo e limitato

$$R_\Omega^2 : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 2. Sia $R_\Omega : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ l'operatore risolvante associato al Laplaciano con condizioni di Dirichlet su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita. Allora esiste una costante N che dipende solo dalla dimensione d tale che la composizione

$$R_\Omega^N : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

può essere estesa ad un operatore limitato

$$R_\Omega^N : L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega).$$

Proof. Possiamo supporre che $d \geq 6$. Sappiamo che R_Ω è un operatore continuo:

$$R_\Omega : L^2 \rightarrow L^{2^*} \quad \text{e} \quad R_\Omega : L^d \rightarrow L^\infty.$$

Teorema di Riesz-Thorin. Sia T un operatore continuo

$$T : L^{p_0} \rightarrow L^{q_0} \quad \text{e} \quad T : L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}.$$

Allora, per ogni $\theta \in (0, 1)$, l'operatore

$$T : L^{p_\theta} \rightarrow L^{q_\theta}$$

è continuo, dove p_θ e q_θ sono tali che

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Di conseguenza, per ogni $p \in [2, d/2]$, l'operatore

$$R_\Omega : L^p \rightarrow L^q \quad \text{dove} \quad q := p \left(1 + \frac{p}{d-p} \right),$$

è limitato. Siccome Ω ha misura finita e

$$\frac{p}{d-p} \geq \frac{4}{d},$$

anche l'operatore

$$R_\Omega : L^p \rightarrow L^{p+8/d}.$$

è limitato. Di conseguenza, esiste n tale che

$$R_\Omega^n : L^{2^*} \rightarrow L^p$$

è limitato dove

$$p := \frac{2d}{d-2} + \frac{8n}{d} > \frac{d}{2}.$$

In conclusione,

$$R_\Omega : L^2 \rightarrow L^{2^*}, \quad R_\Omega^n : L^{2^*} \rightarrow L^p, \quad R_\Omega : L^p \rightarrow L^\infty$$

sono operatori limitati e quindi anche la composizione

$$R_\Omega^{n+2} : L^2 \rightarrow L^\infty$$

è un operatore limitato. □

Dimostrazione di Teorema 1. Sappiamo che la soluzione u del problema

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega u^2 dx = 1$$

è in $L^\infty(\Omega)$. Allora, abbiamo che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \|\lambda u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}} \leq C_d \lambda^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}}$$

e quindi

$$\|u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \leq C_d \lambda^{\frac{d}{d+4}}.$$

□

BIBLIOGRAFIA

Una dimostrazione alternativa di Teorema 1 si trova in [D], Example 2.1.9.

[D] E. Davies. *Heat kernels and spectral theory*. Cambridge University Press (1989).