Iterazione di De Giorgi e stime L^∞

Iterazione di De Giorgi e limitatezza delle soluzioni

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}|\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}}.$$

Dimostrazione. Dimostrereremo il teorema in dimensione $d \ge 3$.
Supporremo inoltre che $f \ge 0$; di conseguenza anche $u \ge 0$ su Ω.

Fissiamo ora $t > 0$ e consideriamo la funzione test

$$u \wedge t\ .$$

Allora, l'ottimalità di u implica

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx - \int uf(x)\,dx \le \frac{1}{2}\int |\nabla(u\wedge t)|^2\,dx - \int (u\wedge t)f(x)\,dx$$

che possiamo scrivere come

$$\frac{1}{2}\int |\nabla (u-t)_+|^2\,dx \le \int (u-t)_+ f(x)\,dx.$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}\int (u-t)_+f(x)\,dx &\le \|f\|_{L^p}\left(\int (u-t)_+^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\le \|f\|_{L^p}\left(\int (u-t)_+^{\frac{d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{d}}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}}\\ &\le \|f\|_{L^p}\left(\int (u-t)_+^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{2d}}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}\ ,\end{aligned}$$

dove

$$\Omega_t = \{u > t\}.$$

D'altra parte

$$C_d\int |\nabla(u-t)_+|^2\,dx \ge \left(\int_{\Omega_t}(u-t)_+^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{d}}.$$

Di conseguenza,

$$\|(u-t)_+\|_{L^{2^*}} \le C_d\|f\|_{L^p}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}.$$

Fissando

$$T > t \qquad \text{e} \qquad \Omega_T = \{u > T\}\ ,$$

abbiamo che

$$\|(u-t)_+\|_{L^{2^*}} \ge (T-t)|\Omega_T|^{\frac{d-2}{2d}}$$

e quindi

$$(T-t)|\Omega_T|^{\frac{d-2}{2d}} \le C_d\|f\|_{L^p}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}.$$

Consideriamo le successioni

$$t_n = \big(1-2^{-n}\big)T \qquad \text{e} \qquad M_n = |\Omega_{t_n}|$$

Di conseguenza,

$$T2^{-n}M_{n+1}^{\frac{d-2}{2d}} \le C_d\|f\|_{L^p}M_n^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}.$$

che scriviamo come

$$M_{n+1} \le \frac{C_d\|f\|_{L^p}^{\frac{2d}{d-2}}}{T^{\frac{2d}{d-2}}}\left(2^{\frac{2d}{d-2}}\right)^n M_n^{1+\varepsilon},$$

dove la costante $\varepsilon > 0$ è definita come

$$\varepsilon = \frac{2p-d}{pd}\,\frac{2d}{d-2} > 0.$$

Ora, scegliendo T tale che

$$\frac{C_d\|f\|_{L^p}^{\frac{2d}{d-2}}}{T^{\frac{2d}{d-2}}} = \left(2^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{-1/\varepsilon}|\Omega|^{-\varepsilon},$$

abbiamo che (vedi Lemma 3)

$$|\Omega_T| = \lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

il che conclude la dimostrazione. □

Esercizio 2. *Dimostrare il teorema precedente in dimensione $d = 2$.*

Lemma 3. *Siano $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $b > 1$ e K delle costanti positive e sia M_n una successione (di numeri reali positivi) tale che*

$$M_0 = K \qquad e \qquad M_{n+1} \le Cb^n M_n^{1+\varepsilon}.$$

Se

$$C \le \frac{1}{b^{1/\varepsilon}K^\varepsilon},$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Dimostrazione. Dimostreremo per induzione che

$$M_n \le Ka^{-n},$$

dove $a > 1$ è una costante che sceglieremo in seguito. Osserviamo che

$$M_{n+1} \le Cb^n M_n^{1+\varepsilon} \le Cb^n\left(Ka^{-n}\right)^{1+\varepsilon}$$

Per dimostrare il passo induttivo, bisogna scegliere a in modo tale che

$$Cb^n\left(Ka^{-n}\right)^{1+\varepsilon} \le Ka^{-n-1},$$

ovvero tale che

$$C\left(ba^{-\varepsilon}\right)^n \le \frac{1}{aK^\varepsilon}.$$

Scegliendo

$$a := b^{1/\varepsilon},$$

otteniamo che se

$$C \le \frac{1}{b^{1/\varepsilon}K^\varepsilon},$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

□

Proposizione 4. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e per ogni $t > 0$ si ha la stima

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{pd}},$$

dove

$$\Omega_t := \{u > t\}.$$

In particolare, quando $p = \infty$,

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \le C_d\|f\|_{L^\infty}|\Omega_t|^{\frac{2}{d}}.$$

STIME $L^1 - L^\infty$ E $L^2 - L^\infty$

Corollario 5. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{pd}{(d+2)p-d}}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2p-d}{(d+2)p-d}}.$$

In particolare, quando $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d\|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+2}}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2}{d+2}}.$$

Dimostrazione. Sia

$$M = \sup_{x\in\Omega} u(x).$$

Allora, per ogni $t \in (0, M)$ abbiamo

$$M - t \le C|\Omega_t|^{2/d-1/p} \qquad \text{dove} \qquad C = C_{d,p}\|f\|_{L^p} \qquad \text{e} \qquad \Omega_t = \{u > t\}.$$

Di conseguenza

$$(M-t)^{\frac{pd}{2p-d}} \le C^{\frac{pd}{2p-d}}|\Omega_t|$$

e integrando per $t \in (0, M)$ otteniamo

$$\frac{M^{1+\frac{pd}{2p-d}}}{1+\frac{pd}{2p-d}} = \int_0^M (M-t)^{\frac{pd}{2p-d}}\,dt \le C^{\frac{pd}{2p-d}}\int_\Omega u_+ \le C^{\frac{pd}{2p-d}}\|u\|_{L^1(\Omega)},$$

il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 6. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{pd}{4p-2d+pd}}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4p-2d}{4p-2d+pd}}.$$

In particolare, quando $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d\|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}}.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □